3ME CYCLE
D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

N° d'ordre : 158

THÈSE

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX-I

POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE

DOCTEUR INGÉNIEUR

PAR

Joël LANGLA
INGÉNIEUR ARTS ET MÉTIERS
ASSISTANT A L'E. N. S. A. M.

Étude du régime permanent dans une régulation par plus-ou-moins. Application avec optimisation.

Soutenue le 24 Janvier 1972, devant la commission d'examen :

MM. SURDIN, Professeur	*Président*
SALARDENNE, Maître de Conférences	*Examinateurs*
PRUDHOMME, Professeur au C.N.A.M. et à l'E.N.S.A.M.	
LIZARAZU, Professeur à l'E.N.S.A.M.	

— 1972 —

3me CYCLE
D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

N° d'ordre : [illegible]

THÈSE

présentée

À L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX-I

POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE

DOCTEUR INGÉNIEUR

PAR

[illegible]

INGÉNIEUR ARTS ET MÉTIERS

ASSISTANT À L'E.N.S.A.M.

Étude du régime permanent dans une régulation par plus-ou-moins. Application avec optimisation.

Soutenue le [illegible] Janvier 1972, devant la commission d'examen

MM. [illegible], Professeur	Président
SALARDENNE, Maître de Conférences	Examinateurs
PRUDHOMME, Professeur au C.N.A.M. et à l'E.N.S.A.M.	
[illegible], Professeur à l'E.N.S.A.M.	

— 1972 —

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547317_0014

3^ME CYCLE

D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

N° d'ordre : 158

THÈSE

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX-I

POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE

DOCTEUR INGÉNIEUR

PAR

Joël LANGLA

INGÉNIEUR ARTS ET MÉTIERS

ASSISTANT A L'E. N. S. A. M.

Étude du régime permanent dans une régulation par plus-ou-moins. Application avec optimisation.

Soutenue le 24 Janvier 1972, devant la commission d'examen :

MM. SURDIN, Professeur .... *Président*

SALARDENNE, Maître de Conférences .... *Examinateurs*

PRUDHOMME, Professeur au C.N.A.M. et à l'E.N.S.A.M.

LIZARAZU, Professeur à l'E.N.S.A.M. ....

— 1972 —

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

AVANT - PROPOS

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Automatique [illegible] sous la direction de Monsieur le Professeur [illegible] . [illegible] conseils [illegible] , qu'il trouve ici le témoignage de ma très sincère gratitude .

Je remercie Messieurs [illegible] , [illegible] et [illegible] d'avoir bien voulu , en dépit de leurs lourdes charges , me faire l'honneur d'accepter de participer à la Commission d'Examen .

A l'origine de cette étude se trouve un mémoire d'ingénieur que Monsieur [illegible] a effectué à l'E.N.S.A.M. de Paris sous la direction de Monsieur le Professeur [illegible] ; je lui exprime à ce sujet toute ma reconnaissance .

J'adresse mes très vifs remerciements à Monsieur le Professeur [illegible] pour ses très précieux [illegible] , ses précieux conseils et son importante étude critique de ce travail .

Je remercie Monsieur [illegible] du Centre d'Études Nucléaires de Saclay pour l'intérêt qu'il a bien voulu me témoigner et pour la documentation qu'il m'a fait parvenir .

Je suis également très reconnaissant à Monsieur [illegible] , Directeur de l'E.N.S.A.M. de Bordeaux-Talence , pour les facilités et les moyens matériels dont j'ai pu bénéficier tout au long de cette étude .

Enfin que toutes les personnes qui m'ont apporté leur concours soient ici remerciées .

- AVANT - PROPOS -

Ce mémoire a été effectué au laboratoire d'Automatique de l'Université de Bordeaux-I sous la direction de Monsieur le Professeur M . SURDIN . Pour ses conseils éclairés et son aide toujours soutenue , je le prie de bien vouloir trouver ici le témoignage de ma très sincère gratitude .

Je remercie Messieurs J . SALARDENNE , R . PRUDHOMME et F . LIZARAZU d'avoir bien voulu , en dépit de leurs lourdes tâches , me faire l'honneur d'accepter de participer à la Commission d'Examen .

A l'origine de cette étude se trouve un mémoire d'ingénieur que Monsieur R . BERACOCHEA et moi avons effectué à l'E.N.S.A.M. de Paris sous la direction de Monsieur le Professeur R . PRUDHOMME : je lui exprime à ce sujet toute ma reconnaissance .

J'adresse mes très vifs remerciements à Monsieur le Professeur F . LIZARAZU pour son aide positive , ses précieux conseils et son importante étude critique de ce travail .

Je remercie Monsieur P . JOVER du Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay pour l'intérêt qu'il a bien voulu me témoigner et pour la documentation qu'il m'a fait parvenir .

Je suis également très reconnaissant à Monsieur R . PICANI Directeur de l'E.N.S.A.M. de Bordeaux-Talence , pour les conditions et les moyens matériels dont j'ai pu bénéficier tout au long de cette étude .

Enfin que toutes les personnes qui m'ont apporté leur concours soient ici remerciées .

SOMMAIRE

O - INTRODUCTION

page

O - 1 Généralités 1
O - 2 But de l'étude . Méthodes . 2
O - 3 Application . 2
O - 4 Plan . 3

I - METHODES D'ETUDES DE CYPKIN-HAMEL DES ASSERVISSEMENTS PAR " PLUS-OU-MOINS "

I - 1 Généralités . 5
I - 1 - 1 Notations . 5
I - 1 - 2 Conditions d'auto-oscillation . 6
I - 2 Formulation de Hamel et de Cypkin . 7
I - 2 - 1 "plus-ou-moins" sans seuil . 7
I - 2 - 1 - 1 Lieu de Hamel . 8
I - 2 - 1 - 2 Lieu de Cypkin . 12
I - 2 - 1 - 3 Relation . 14
I - 2 - 2 "plus-ou-moins" avec seuil . 15
I - 3 Généralisation . 17
I - 3 - 1 Remarques . 17
I - 3 - 2 Pôles multiples non nuls . 17
I - 3 - 2 - 1 Pôle double . 17
I - 3 - 2 - 2 Pôle triple . 20
I - 3 - 2 - 3 Pôle d'ordre quelconque . 20

page

I - 3 - 3 Pôles nuls (intégrations) . 21
I - 3 - 3 - 1 Une intégration . 21
I - 3 - 3 - 2 Deux intégrations . 21
I - 3 - 3 - 3 Intégrations en nombre m quelconque . 22
I - 3 - 4 Conclusion . 23
I - 4 Constructions . 24
I - 4 - 1 Lieux de Cypkin . 24
I - 4 - 2 Lieux de Hamel . 25
I - 4 - 2 - 1 Remarques . 25
I - 4 - 2 - 2 Construction . 26
I - 5 Conséquences pratiques . 28
I - 5 - 1 Propriétés et limites des lieux de Hamel-Cypkin . 28
I - 5 - 2 Obtention directe du cycle limite . 29
I - 5 - 2 - 1 Equations . 29
I - 5 - 2 - 2 Schémas analogiques . 31

II - ALGORITHMES DE CALCULS

II - 1 Principes . 34
II - 1 - 1 Schéma fonctionnel . Paramètres . 34
II - 1 - 2 Critère et contraintes . 35
II - 1 - 3 Méthodes de calcul . 36
II - 1 - 3 - 0 Remarque préliminaire . 36
II - 1 - 3 - 1 Etude de l'auto-oscillation . 36
II - 1 - 3 - 2 Performances dynamiques . 37
II - 1 - 3 - 3 Minimisation de la valeur du critère . 38
II - 1 - 3 - 4 Application des formules de Hamel-Cypkin . 38

page

II - 2 Algorithmes . 39
II - 2 - 1 Seuil et hystérésis . 39
II - 2 - 2 Amplitude maximum de l'oscillation . 41
II - 2 - 3 Réponse indicielle . 42
II - 3 Mise en oeuvre sur calculateur numérique . 43
II - 3 - 1 " La méthode du simplexe " . 43
II - 3 - 1 - 1 Choix de l'algorithme . 43
II - 3 - 1 - 2 Principe . 43
II - 3 - 1 - 3 Organigramme de calcul . 45
II - 3 - 2 Elaboration du critère . 47
II - 3 - 2 - 1 Méthode d'évaluation . 47
II - 3 - 2 - 2 Les fonctions de pénalisation. 47
II - 3 - 2 - 3 Organigramme de calcul . 48
II - 3 - 3 Méthode de Hamel-Cypkin . 50
II - 3 - 3 - 1 Remarques . 50
II - 3 - 3 - 2 Algorithme et organigramme . 50
II - 3 - 4 Simulation de systèmes linéaires . 53
II - 3 - 4 - 1 Choix de la méthode d'intégration . 53
II - 3 - 4 - 2 Principe . 53
II - 3 - 4 - 3 Organigramme . 54
II - 4 Essais . 56
II - 4 - 1 Calculatrice numérique et programmes . 56
II - 4 - 2 Expériences et adaptations . 56
II - 4 - 2 - 1 Précision . 56
II - 4 - 2 - 2 Modifications . 60
II - 4 - 2 - 3 Temps de calcul et convergence . 63

III - APPLICATION

III - 0 Introduction . 65

page

III - 1 Le réacteur nucléaire . 65
III - 1 - 1 Description sommaire . 65
III - 1 - 2 Modèles mathématiques . 67
III - 1 - 2 - 1 La pile . 67
III - 1 - 2 - 2 Le moteur et les barres de contrôle . 68
III - 1 - 2 - 3 Détecteurs et appareils de mesure . 68
III - 2 Mise en oeuvre . 69
III - 2 - 1 Choix du type de pile . 69
III - 2 - 2 Paramètres . 69
III - 2 - 3 Résultats . 69
III - 2 - 3 - 1 Configurations choisies . 69
III - 2 - 3 - 2 Valeurs numériques . 70
III - 2 - 3 - 3 Examen des résultats . 73

IV - CONCLUSIONS 75

0 - INTRODUCTION

0 - 1 GENERALITES

La synthèse d'un système est en général le résultat de compromis . Même lorsqu'il existe une solution théoriquement idéale , les contraintes technologiques obligent la plupart du temps à faire des choix qui écartent l'objet final de son image initiale .

Dans le cas des systèmes asservis linéaires ou linéarisables , les méthodes classiques permettent de prévoir assez commodément le comportement futur de l'asservissement . Par contre , lorsqu'il s'agit de choisir les valeurs à donner à un correcteur le problème est déjà beaucoup plus délicat ; les différentes méthodes proposées dans la littérature font appel à des critères plus ou moins équivalents mais qui nécessitent des choix à priori de la part de l'utilisateur (critère de Hall-Sartorius , minimum de l'intégrale du module de l'erreur d'une réponse indicielle , ...) .

Lorsqu'on aborde l'étude des systèmes non linéaires , la part d'empirisme , le côté "recette" ne peut qu'augmenter . Bien sûr il existe quelques cas où des solutions mathématiques ont pu éclairer nettement certaines questions mais il reste , et restera sans doute encore longtemps , beaucoup de points dans l'ombre .

Les asservissements comportant un "plus-ou-moins" ont fait l'objet d'abondants travaux essentiellement dus à Hamel [1] et à Cypkin [2] . Toutefois , si cette classe de systèmes a été solidement pourvue en outils d'étude , leur synthèse n'en reste pas moins essentiellement liée à l'expérience .

0 - 2 BUT DE L'ETUDE - METHODES

On se propose d'essayer de construire une méthode permettant de réaliser la synthèse d'un système du type "tout-ou-rien". Il sera bien sûr fait appel , lorsque ce sera possible , aux méthodes connues ; mais quand rien ne permettra de prévoir commodément un résultat , l'expérience reprendra ses droits sous la forme d'essais par simulation . L'outil le plus approprié à ce genre d'étude est le calculateur hybride mais des contraintes locales n'ont pas permis son emploi ; le travail sera essentiellement orienté vers la synthèse d'un algorithme de calcul sur ordinateur , les résultats étant vérifiés sur calculateur analogique .

Le but de ce travail est de parvenir à minimiser la pulsation de l'auto-oscillation limite qui s'établit en général dans un système asservi par "plus-ou-moins" lorsqu'il travaille en régulateur . Cette recherche de minimum sera guidée par un ensemble de contraintes imposées par le sens physique de certains paramètres ou par des choix à priori .

0 - 3 APPLICATION

On envisage d'appliquer la méthode à la synthèse d'un système de régulation de la puissance d'un réacteur nucléaire . On désire que les organes de la chaîne interviennent le moins souvent possible (pulsation minimum de l'auto-oscillation si elle existe) afin de prolonger leur durée de vie ; toutefois on demande que la puissance ne s'écarte pas plus de 5/1000 de sa valeur de consigne . D'autres contraintes qui découleront de la logique de l'étude seront ajoutées par la suite .

0 - 4 PLAN

On commencera par rappeler les méthodes d'étude de Cypkin et de Hamel . A cette occasion on proposera un certain nombre de remarques sur la généralisation et la mise en oeuvre de ces travaux . En particulier on signalera une méthode de construction de graphes (dits lieux de Hamel-Cypkin) et un moyen d'obtention directe du régime permanent pour un travail en régulateur .

En deuxième partie on établira un algorithme de calcul numérique . On choisira le principe du calcul , la façon d'élabore le critère d'optimisation , les contraintes à adjoindre . Ensuite viendra l'étude des options à prendre parmi les différentes méthodes d'analyse numérique . On terminera par l'examen des organigrammes de calcul .

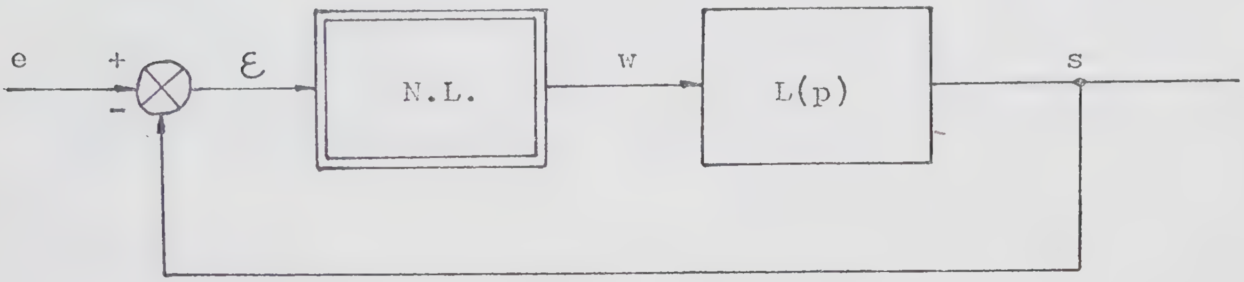
En troisième et dernière partie on examinera les résultats obtenus et on les vérifiera par simulation directe . On tentera de dégager une conclusion sur les points positifs et les faiblesse de cette étude .

I - METHODES D'ETUDES DE HAMEL-CYPKIN DES ASSERVISSEMENTS PAR "PLUS-OU-MOINS" .

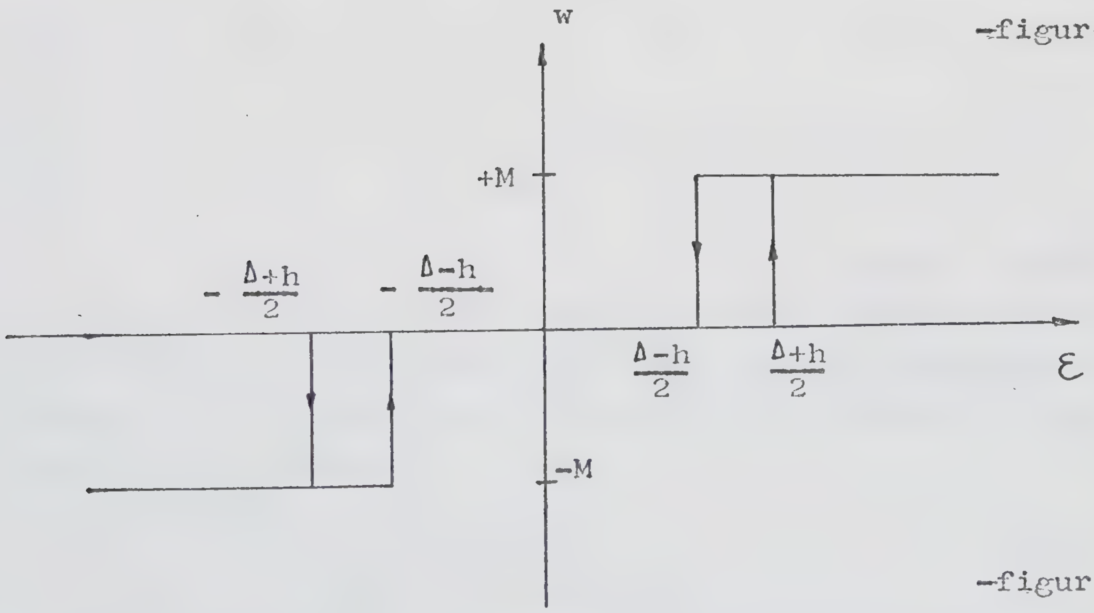
I - 1 - GENERALITES .

I - 1 - 1 - Notations .

Lorsqu'un asservissement est composé d'éléments linéaires et d'un seul organe non linéaire de type "plus-ou-moins" , on peut ramener son schéma fonctionnel au type représenté figure I-1



-figure I-1 -



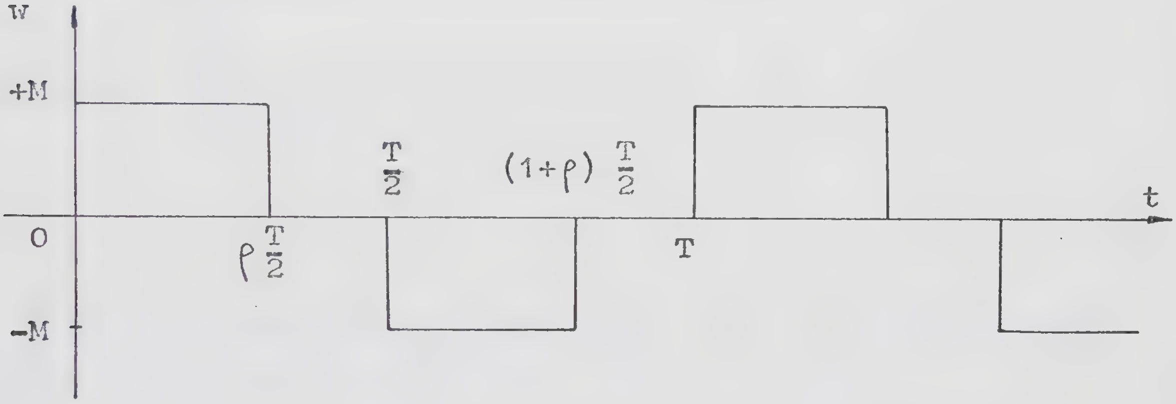
-figure I-2 -

N.L. représente l'élément non linéaire caractérisé figure I-2 . Il peut comporter (ou non) un seuil Δ et une hystérésis h . Il est supposé symétrique .

I - 1 - 2 Conditions d'auto-oscillation :

S'il existe un régime périodique limite , la caractéristique de l'élément non linéaire étant prise symétrique et tous les autres éléments étant linéaires , cette oscillation sera symétrique pour un travail du système en régulateur (e=o) .

A ce régime périodique pourra être associée une trajectoire fermée dans l'espace de phase parcourue en T secondes . Si l'origine du temps est prise lors d'une commutation de 0 à + M , le passage de + M à 0 se produira à la date $\rho \frac{T}{2}$; la deuxième commutation de 0 à - M aura lieu à la date $\frac{T}{2}$ suivie , pour $t = (1+\rho)\frac{T}{2}$, du retour de - M à 0 ; à la date t = T le système se retrouvera dans l'état initial .



- figure I-3 bis -

Puisque , pour t = o , on a une commutation de 0 à + M , $d\mathcal{E}/dt$ est positif à cette date ; par des considérations de symétrie on est alors conduit à poser les conditions d'auto-oscillation suivantes :

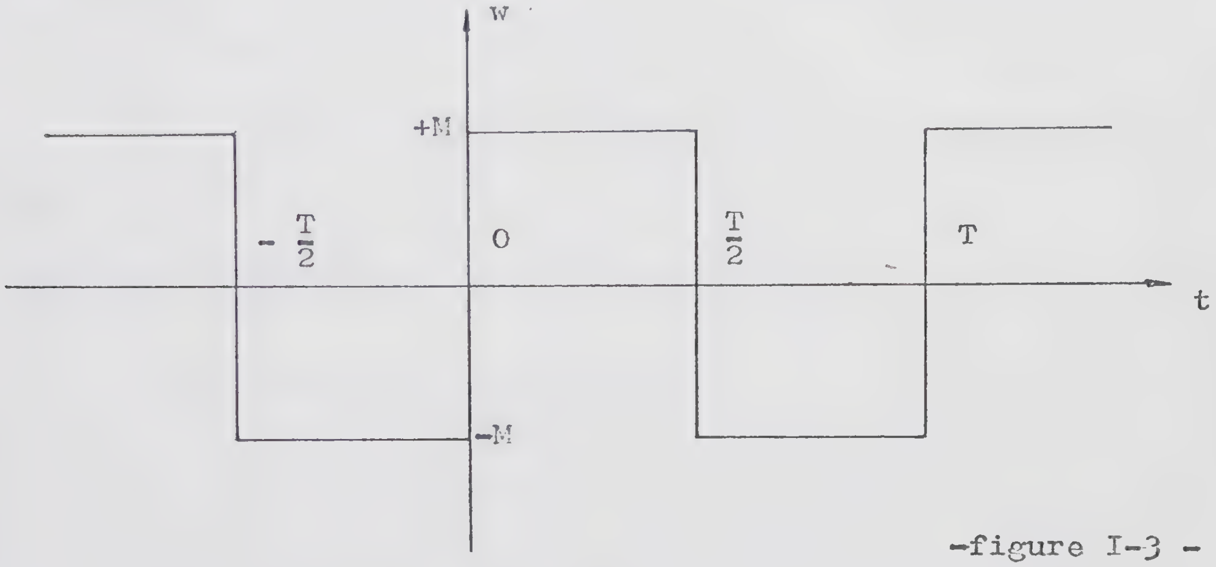
$$\mathcal{E}\left(\frac{T}{2}\right) = -\frac{\Delta+h}{2} \qquad \frac{d\mathcal{E}}{dt}\left(\frac{T}{2}\right) < 0$$

$$\mathcal{E}\left(\rho\frac{T}{2}\right) = \frac{\Delta-h}{2} \qquad \frac{d\mathcal{E}}{dt}\left(\rho\frac{T}{2}\right) < 0$$

I - 2 - FORMULATION DE HAMEL ET DE CYPKIN .

I - 2 - 1 - "Plus-ou-moins" sans seuil .

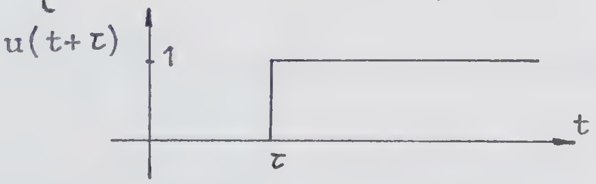
La sortie w (t) de l'organe non linéaire a l'allure indiquée figure I-3 lorsqu'on est en présence d'un régime périodique .



-figure I-3 -

L'origine du temps étant prise lors d'une commutation de 0 à + M , sur $\left[0 , \frac{T}{2} \right[$ on a :

$$w(t) = M \left\{ u(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[u\left(t + \frac{kT}{2}\right) - u\left(t + \frac{(k-1)\,T}{2}\right) \right] \right\} \qquad (\text{I-1})$$



Les formulations de Hamel et de Cypkin vont permettre de connaître les caractéristiques de $\mathcal{E}$, pour ce régime périodique, à la commutation .

I - 2 - 1 - 1 Lieu de Hamel :

Supposons que L(p) ne contient pas de terme intégrateur , de retard pur ni de pôle multiple :

$$L(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{p-p_i}$$

avec p_i pôle de L(p)

A_i résidu de L(p) pour $p = p_i$

si degré (P) < degré (Q)

Si q(t) est la réponse indicielle de l'ensemble linéaire L(p) :

$$\mathcal{L}\ q(t) = \frac{L(p)}{p} = \mathcal{L}\left(A_o + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{p_i} e^{p_i t} \right)$$

avec $\mathcal{L}$ = opérateur de Laplace

$$A_o = \sum_{i=1}^{n} - \frac{A_i}{p_i}\, u(t)$$

Sur $\left[0\ ,\ \frac{T}{2}\right[$, la sortie s(t) de L(p) sera donc :

$$s(t) = M.q(t) + M \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[q\left(t + k\frac{T}{2}\right) - q\left(t + (k-1)\frac{T}{2}\right) \right]$$

$$s(t) = M.q(t) + M \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{p_i} e^{p_i t} \left(e^{p_i \frac{T}{2}} - 1\right) e^{\frac{(k-1)T}{2} p_i} \right]$$

soit , en permutant les sommations :

$$s(t) = M.q(t) + M \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{p_i} e^{p_i t} \left(e^{p_i \frac{T}{2}} - 1\right) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{\frac{k-1}{2} T p_i}$$

d'où :

$$s(t) = Mq(t) - M \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{p_i} e^{p_i t} \frac{e^{p_i \frac{T}{2}} - 1}{e^{p_i \frac{T}{2}} + 1}$$

si partie réelle de $p_i < 0$

soit encore :

$$s(t) = Mq(t) - M \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{p_i} e^{p_i t} \operatorname{th} \frac{p_i T}{4}$$

pour $t = 0^+$

$$s(0) = Mq(0^+) - M \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{p_i} \operatorname{th} \frac{p_i T}{4}$$

avec $q(0^+) = \lim_{p \to \infty} L(p)$

et :

$$\frac{ds}{dt}(0) = Ml_o - M \sum_{i=1}^{n} A_i \operatorname{th} \frac{p_i T}{4}$$

où $l_o = l(0^+) = \lim_{p \to \infty} pL(p)$

pour $t = \frac{T^+}{2}$, on aura pour s et $\frac{ds}{dt}$ des valeurs opposées (oscillation symétrique)

$$s(\frac{T^+}{2}) = - s(0)$$

Or : $\mathcal{E} = -s$ (travail en régulateur)
d'où :

$$\mathcal{E}(\frac{T}{2}) = Mq_o - M \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{p_i} \text{ th } \frac{p_i T}{4}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(\frac{T}{2}) = Ml_o - M \sum_{i=1}^{n} A_i \text{ th } \frac{p_i T}{4}$$

Toutefois ces formules ne définissent la valeur de $\mathcal{E}$ et de $d\mathcal{E}/dt$ qu'après la commutation ($\frac{T^+}{2}$) alors que les conditions de périodicité doivent s'appliquer avant la commutation à la date $\frac{T^-}{2}$ (cf [3]) .

La discontinuité de s , puisque Mq_o est la discontinuité pour un saut de 0 à + M , est $- 2 Mq_o$ pour une commutation de + M à - M

De même celle de $\frac{ds}{dt}$ est $- 2 Ml_o$
D'où pour $\mathcal{E}$ un saut de $+ 2 Mq_o$
et pour $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ un saut de $+ 2 Ml_o$

Donc:

$$\mathcal{E}(\frac{T^-}{2}) = \mathcal{E}(\frac{T^+}{2}) - 2 Mq_o$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(\frac{T^-}{2}) = \frac{d\mathcal{E}}{dt}(\frac{T^+}{2}) - 2 Ml_o$$

Conclusion :

$$\mathcal{E}\left(\frac{T}{2}\right) = -Mq_o - M\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{p_i}\,\mathrm{th}\,\frac{p_iT}{4} \qquad (\text{ I-2 })$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}\left(\frac{T}{2}\right) = -Ml_o - M\sum_{i=1}^{n}A_i\,\mathrm{th}\,\frac{p_iT}{4} \qquad (\text{ I-3 })$$

avec

$$q_o = \lim_{p\to\infty} L(p)$$

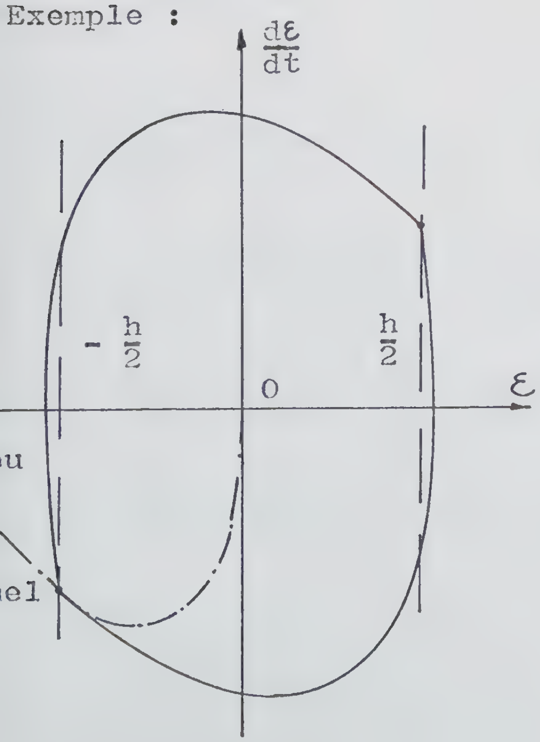
$$l_o = \lim_{p\to\infty} pL(p)$$

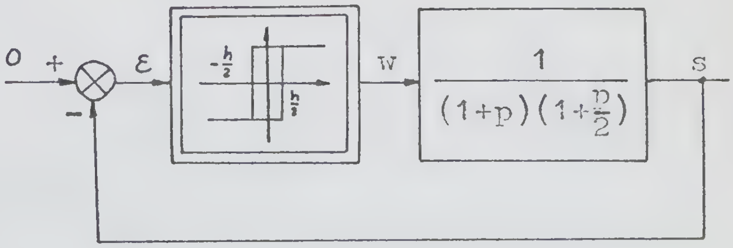
A_i = résidu de L(p) pour $p = p_i$

p_i = pôle simple non nul de L(p)

Les équations (I-2) et (I-3) sont les équations paramétriques du lieu de Hamel de L(p) . Ce lieu , tracé dans le plan de phase ($\mathcal{E}$, $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$) est gradué en T ; une intersection avec la droite $\mathcal{E} = -\frac{h}{2}$ correspond à une oscillation périodique possible du système pourvu que cette intersection soit située dans le demi-plan $\frac{d\mathcal{E}}{dt} < 0$.

Exemple :





- figure I-4 -

I - 2 - 1 - 2 - Lieu de Cypkin .

A la formule (I-1) :

$$w(t) = M\left[u(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \; u\left(t+\frac{kT}{2}\right) - u\left(t+\frac{(k-1)T}{2}\right)\right]$$

on associe son développement en série de Fourier

$$w(t) = \frac{4M}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$$

Pour L(p) , fonction de transfert de la partie linéaire , on peut poser :

$$L(j\omega) = A(\omega)\; e^{j\phi(\omega)}$$

La réponse s(t) de L(p) à une entrée w(t) est donc :

$$s(t) = \frac{4M}{\pi}\sum_n \frac{1}{n}\, A(n\omega)\; \sin(n\omega t+\phi(n\omega))$$

$n = 2k-1 \qquad k = 1,2,3,\ldots$

de même :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{4M}{\pi}\,\omega\sum_n A(n\omega)\; \cos(n\omega t+\phi(n\omega))$$

$n = 2k-1 \qquad k = 1,2,3,\ldots$

En appliquant les conditions d'auto-oscillation et sachant qu'on travaille en régulateur , on a :

$$\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{4M}{\pi}\sum_n \frac{A(n\omega)\;\sin\phi(n\omega)}{n}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{4M}{\pi}\,\omega\sum_n A(n\omega)\;\cos\phi(n\omega)$$

$n = 2k-1 \qquad k = 1,2,3,\ldots$

Ainsi que le montre [2], en présence de discontinuités , le développement en série de Fourier s_F de s est tel que :

$$s_F(\frac{T}{2}) = \frac{1}{2}\left[s(\frac{T}{2}^-) + s(\frac{T}{2}^+)\right]$$

le saut à la commutation étant de $2Mq_o$ on déduit :

$$\varepsilon(\frac{T}{2}^-) = \varepsilon(\frac{T}{2}^+) - Mq_o$$

de même

$$\frac{d\varepsilon}{dt}(\frac{T}{2}^-) = \frac{d\varepsilon}{dt}(\frac{T}{2}^+) - Ml_o$$

Conclusion

$$\varepsilon(\frac{\pi}{\omega}) = \varepsilon(\frac{T}{2}) = -Mq_o + \frac{4M}{\pi}\sum_n \frac{A(n\omega)\sin\Phi(n\omega)}{n} \qquad (I-4)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}(\frac{\pi}{\omega}) = \frac{d\varepsilon}{dt}(\frac{T}{2}) = -Ml_o + \frac{4M}{\pi}\omega\sum_n A(n\omega)\sin\Phi(n\omega) \qquad (I-5)$$

$n = 2k-1 \qquad k = 1,2,3,\ldots$

$$q_o = \lim_{p\to\infty} L(p) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$l_o = \lim_{p\to\infty} pL(p)$$

En présence d'une hystérésis h les conditions d'auto-oscillation s'écriront :

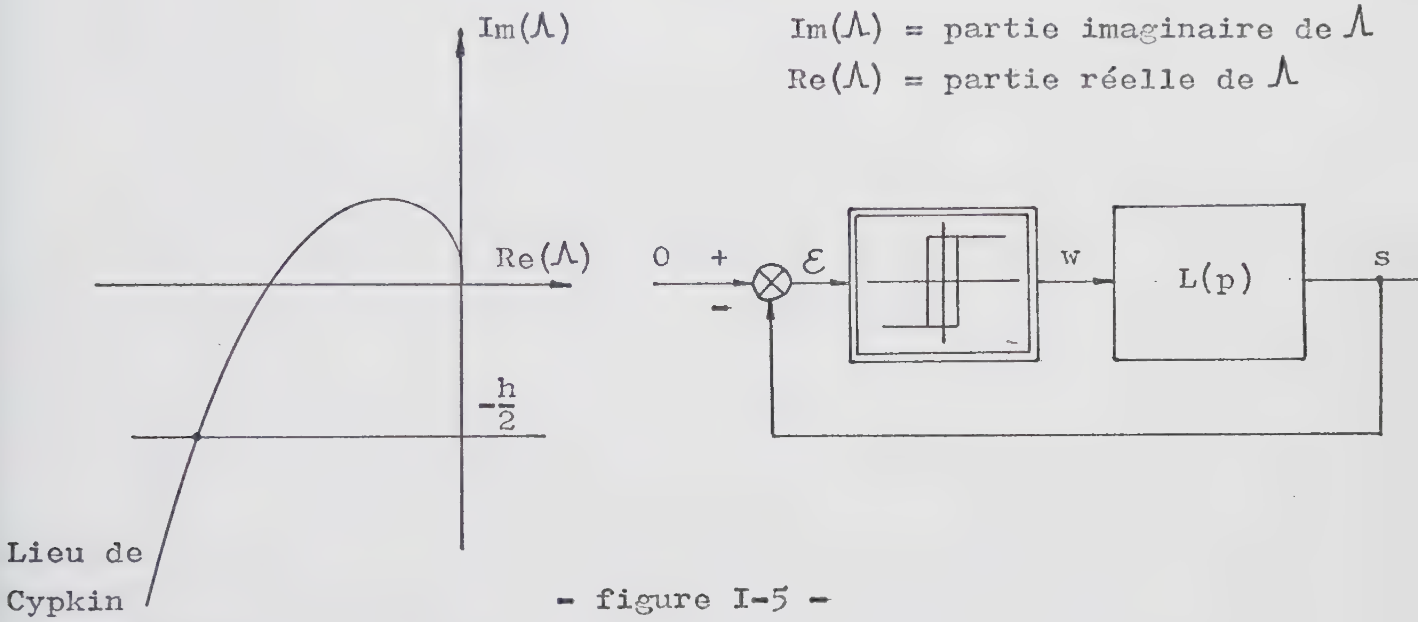
$$\varepsilon(\frac{\pi}{\omega}) = -\frac{h}{2}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}(\frac{\pi}{\omega}) < 0$$

Cypkin a créé la fonction complexe :

$$\Lambda(\omega) = \frac{1}{\omega}\frac{d\varepsilon}{dt} + j\varepsilon \qquad \text{(I-6)}$$

L'hodographe , dans le plan complexe , du vecteur représentant $\Lambda(\omega)$ est le <u>lieu de Cypkin</u>



- figure I-5 -

I - 2 - 1 - 3 - <u>Relation</u> .

Les concepts de Hamel et de Cypkin sont mathématiquement équivalents :

$$Re(\Lambda(\omega)) = \frac{1}{\omega}\frac{d\varepsilon}{dt}\left(\frac{T}{2}\right)$$

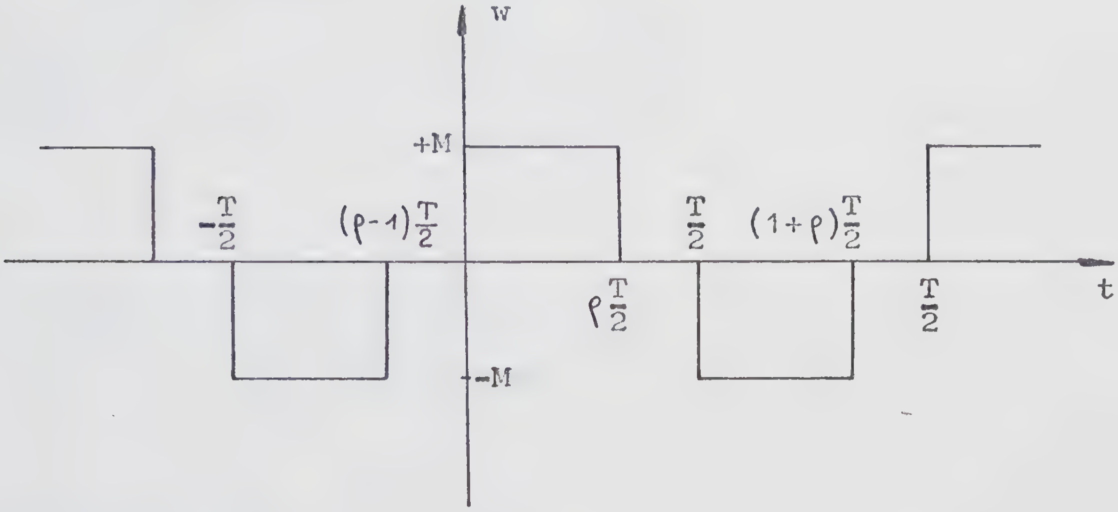
$$Im(\Lambda(\omega)) = \varepsilon\left(\frac{T}{2}\right)$$

Ce qui est démontrable à l'aide de la relation :

$$\operatorname{th}\frac{\pi x}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+(2k-1)^2}$$

I - 2 - 2 - "Plus-ou-moins" avec seuil .

La sortie $w(t)$ de l'organe non linéaire a maintenant l'allure indiquée figure I-6 lorsqu'on est en présence d'un régime périodique :



-figure I-6 -

L'oscillation est maintenant caractérisée par les deux paramètres T et ρ.

Dans ce cas Cypkin propose , la méthode de démonstration étant analogue à celles vues en I-2-1 , deux fonctions $\Lambda(\omega)$ et $\Lambda'(\omega)$ telles que :

$$\operatorname{Im}\Lambda = \frac{2M}{\pi}\sum_n \left[\frac{\sin n\rho\pi}{n} U(n\omega) + \frac{1-\cos n\rho\pi}{n} V(n\omega) \right]$$

$$\operatorname{Re}\Lambda = \frac{2M}{\pi}\sum_n \left[(1-\cos n\rho\pi)\, U(n\omega) - \sin n\rho\pi\, V(n\omega) \right]$$

$$\operatorname{Re}\Lambda' = \frac{2M}{\pi}\sum_n \left[(1-\cos n\rho\pi)\, U(n\omega) + \sin n\rho\pi\, V(n\omega) \right]$$

$$\operatorname{Im}\Lambda' = -\frac{2M}{\pi}\sum_n \left[\frac{\sin n\rho\pi}{n} U(n\omega) - \frac{1-\cos n\rho\pi}{n} V(n\omega) \right]$$

avec $n = 2k-1$ $\quad k = 1,2,3,$

Ou , en représentation de Hamel :

$$\mathcal{E}\left(\frac{T}{2}\right) = -M\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{p_i} \frac{e^{p_i \frac{T}{2}} - e^{p_i(1-\rho)\frac{T}{2}}}{e^{p_i \frac{T}{2}} + 1}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}\left(\frac{T}{2}\right) = -M\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{e^{p_i \frac{T}{2}} - e^{p_i(1-\rho)\frac{T}{2}}}{e^{p_i \frac{T}{2}} + 1}$$

$$\mathcal{E}\left(\rho\frac{T}{2}\right) = -M\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{p_i} \frac{e^{\rho p_i \frac{T}{2}} - 1}{e^{p_i \frac{T}{2}} + 1}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}\left(\rho\frac{T}{2}\right) = -M\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{e^{\rho p_i \frac{T}{2}} - 1}{e^{p_i \frac{T}{2}} + 1}$$

n = nombre de pôles de L(p)
(distincts et non nuls)

Ces formules doivent être aussi complétées par le saut de s ou de $\frac{ds}{dt}$ lorsqu'il existe . [3] .

Ces formules sont caractéristiques d'une fonction de transfert L(p) et d'un relais pourvu d'un seuil Δ et d'une hystérésis h tels que :

$$-\frac{\Delta+h}{2} = \mathcal{E}\left(\frac{T}{2}\right) = \operatorname{Im}\Lambda$$

$$-\frac{\Delta-h}{2} = \mathcal{E}\left(\rho\frac{T}{2}\right) = \operatorname{Im}\Lambda'$$

I - 3 - GENERALISATION

I - 3 - 1 - Remarques:

Les formules de Cypkin sont établies sans qu'il soit apporté de restriction quant à la forme de transmittance de l'élément linéaire L(p) ; par contre , pour l'établissement des formules de Hamel , L(p) est supposée dépourvue de pôle multiple ou nul (intégration) .

L'étude qui suit se propose d'étendre les formules de Hamel aux cas de pôles multiples ou nuls lorsque le "plus-ou-moins" ne comporte pas de seuil . Pour une non-linéarité avec seuil , la généralisation ne paraît pas intéressante , étant donné la lourdeur des résultats qui vont suivre : il est préférable alors d'utiliser la formulation de Cypkin .

Dans tout ce qui suit , nous prendrons , sans restriction de généralité , M = 1 .

I - 3 - 2 - Pôles multiples non nuls :

I - 3 - 2 - 1 - Pôle double :

Dans les formules (I-2) et (I-3) on fait tendre le pôle p_{n-1} vers le pôle p_n et on cherche s'il existe une limite pour $\mathcal{E}$ et $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$.

$$\mathcal{E} = - q_o - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{A_i}{p_i} \text{ th } \frac{p_i T}{4} - \frac{A_{n-1}}{p_{n-1}} \text{ th } \frac{p_{n-1} T}{4} - \frac{A_n}{p_n} \text{ th } \frac{p_n T}{4} \qquad (\text{I-2})$$

On pose :

$$L(p) = \frac{P}{Q} = \frac{P}{Q_2(p-p_{n-1})(p-p_n)} \qquad p_{n-1} = p_n + \alpha \quad \alpha \to 0$$

d'où :

$$A_{n-1} = \left[\frac{P}{Q_2(p-p_n)} \right]_{p=p_n+\alpha} \qquad A_n = \left[\frac{P}{Q_2(p-p_n-\alpha)} \right]_{p=p_n}$$

On pose aussi :

$$\delta = - \frac{A_{n-1}}{p_{n-1}} \text{ th } \frac{p_{n-1}T}{4} - \frac{A_n}{p_n} \text{ th } \frac{p_n T}{4} \text{ et } f_2 = \frac{P}{Q_2}$$

il vient :

$$\delta = \Big[f_2 \Big]_{p=p_n} \cdot \frac{1}{p_n} \text{ th } \frac{p_n T}{4} - \Big[f_2 \Big]_{p=p_n+\alpha} \frac{1}{\alpha(p_n+\alpha)} \text{ th } \frac{(p_n+\alpha)T}{4}$$

$$\delta = \frac{\Big[f_2 \Big]_{p=p_n} \text{ th } \frac{p_n T}{4} - \Big[f_2 \Big]_{p=p_n+\alpha} \text{ th } \frac{(p_n+\alpha)T}{4}}{\alpha\,(p_n+\alpha)} + \frac{f_2 \;{}_{p=p_n} \text{ th } \frac{p_n T}{4}}{p_n(p_n+\alpha)}$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \delta = \frac{\Big[f_2 \Big]_{p=p_n} \text{ th } \frac{p_n T}{4}}{p_n^2} - \frac{\left[f_2 \text{ th } \frac{pT}{4} \right]'_{p=p_n}}{p_n}$$

De même pour :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = l_o - \sum_{i=1}^{n-2} A_i \ \text{th} \ \frac{p_i T}{4} - A_{n-1} \ \text{th} \ \frac{p_{n-1}T}{4} - A_n \ \text{th} \ \frac{p_n T}{4}$$

on pose :

$$\delta = - A_{n-1} \ \text{th} \ \frac{p_{n-1}T}{4} - A_n \ \text{th} \ \frac{p_n T}{4}$$

il vient alors :

$$\lim_{\alpha \to o} \delta = - \left[f_2 \ \text{th} \ \frac{Tp}{4} \right]'_{p=p_n}$$

D'où la formule associée à un pôle double , les autres pôles étant supposés simples :

$$\varepsilon = - q_o - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{A_i}{p_i} \ \text{th} \ \frac{p_i T}{4} + \frac{1}{p_n^2} \left[\frac{p}{Q_2} \right]_{p=p_n} \cdot \ \text{th} \ \frac{p_n T}{4} - \frac{1}{p_n} \left[\frac{p}{Q_2} \ \text{th} \ \frac{pT}{4} \right]'_{p=p_n}$$

(I-2-2-)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = - l_o - \sum_{i=1}^{n-2} A_i \ \text{th} \ \frac{p_i T}{4} - \left[\frac{p}{Q_2} \ \text{th} \ \frac{pT}{4} \right]'_{p=p_n}$$

(I-3-2-)

I- 3 - 2 - 2 - Pôle triple :

Dans les formules (I-2-2) et (I-3-2) on fait tendre le pôle p_{n-2} vers le pôle double p_n et on trouve les limites suivantes :

$$\mathcal{E} = - q_o - \sum_{i=1}^{n-3} \frac{A_i}{p_i} \text{ th } \frac{p_i T}{4} - \frac{1}{2p_n} \left[\frac{P}{Q_3} \text{ th } \frac{pT}{4} \right]''_{p=p_n} + \frac{1}{p_n^2} \left[\frac{P}{Q_3} \text{ th } \frac{pT}{4} \right]'_{p=p_n}$$

$$- \frac{1}{p_n^3} \left[\frac{P}{Q_3} \right]_{p=p_n} \text{ th } \frac{p_n T}{4} \qquad (\text{I-2-3})$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = - 1_o - \sum_{i=1}^{n-3} A_i \text{ th } \frac{p_i T}{4} - \frac{1}{2} \left[\frac{P}{Q_3} \text{ th } \frac{pT}{4} \right]''_{p=p_n} \qquad (\text{I-3-3})$$

avec $L(p) = \frac{P}{Q}$ et $Q = Q_2(p-p_n)^2$

I - 3 - 2 - 3 - Pôle d'ordre quelconque :

Les calculs précédents conduisent à proposer les formules suivantes pour un pôle d'ordre m :

$$\mathcal{E} = - q_o - \sum_{i=1}^{n-m} \frac{A_i}{p_i} \text{ th } \frac{p_i T}{4} - \frac{(-1)^{m-i}}{(i-1)!} \frac{1}{p^{m+1-i}} \left[\frac{P}{Q_m} \text{ th } \frac{Tp}{4} \right]^{(i-1)}_{p=p_n} \qquad (\text{I-2-m})$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = - 1_o - \sum_{i=1}^{n-m} A_i \text{ th } \frac{p_i T}{4} - \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{P}{Q_m} \text{ th } \frac{Tp}{4} \right]^{(m-1)}_{p=p_n} \qquad (\text{I-3-m})$$

avec $L = \frac{P}{Q}$, $Q = Q_m(p-p_n)^m$ et $0! = 1$

Ces formules qui vérifient toutes les formules du type (I-2) et (I-3) déjà rencontrées peuvent être démontrées par récurrence .

I - 3 - 3 - Pôles nuls (intégrations) .

I - 3 - 3 - 1 - Une intégration :

Dans les formules (I-2) et (I-3) on fait tendre le pôle p_n vers zéro . On trouve alors les limites suivantes :

$$\mathcal{E} = - q_o - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_i}{p_i} \text{ th } \frac{p_i T}{4} - \left[\frac{P}{Q_1} \right]_{p=o} \cdot \frac{T}{4} \qquad (\text{I-2-1-0})$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = - 1_o - \sum_{i=1}^{n-1} A_i \text{ th } \frac{p_i T}{4} \qquad (\text{I-3-1-0})$$

avec $L = \frac{P}{Q}$ et $Q = pQ_1$

I - 3 - 3 - 2 - Deux intégrations :

Dans les formules (I-2-2) et (I-3-2) on fait tendre le pôle p_n vers zéro . Il vient :

$$\mathcal{E} = - q_o - \frac{T}{4} \left[\frac{P}{Q_2} \right]'_{p=o} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_i}{p_i} \text{ th } \frac{p_i T}{4} \qquad (\text{I-2-2-0})$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = - 1_o - \frac{T}{4} \left[\frac{P}{Q_2} \right]_{p=o} - \sum_{i=1}^{n-1} A_i \text{ th } \frac{p_i T}{4} \qquad (\text{I-3-2-0})$$

avec $L = \frac{P}{Q}$ et $Q = p^2 Q_2$

I - 3 - 3 - 3 - Intégrations en nombre m quelconque :

La procédure reste la même : dans les formules (I-2-m) et (I-3-m) on fait tendre le pôle multiple vers zéro .

$$\mathcal{E} = - q_o - \sum_{i=1}^{n-m} \frac{A_i}{p_i} \text{ th } \frac{p_i T}{4} - \sum_{i=1}^{m} \frac{C_{m-i+1}}{(i-1)!} \left(\frac{T}{4}\right)^{m-i+1} \left[\frac{p}{Q_m} \right]_{p=o}^{(i-1)} \qquad (\text{ I-2-m-0})$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = - l_o - \sum_{i=1}^{n-m} A_i \text{ th } \frac{p_i T}{4} - \sum_{i=1}^{m} \frac{C_{m-i}}{(i-1)!} \left(\frac{T}{4}\right)^{m-i} \left[\frac{p}{Q_m} \right]_{p=o}^{(i-1)} \qquad (\text{ I-3-m-0})$$

avec $L = \frac{P}{Q}$, $Q = p^m Q_m$ et C_j tel que th $x = C_j x^j$

I - 3 - 4 - Conclusion :

Toutes les formules énumérées précédemment peuvent être regroupées en une seule .

Si :
- n est le nombre de pôles distincts et non nuls de $L=\frac{P}{Q}$
- m est le nombre d'intégrations de L
- k est l'ordre de multiplicité du pôle p_i
- $Q = Q_i(p-p_i)^k$

$$\mathcal{E} = - q_o - \sum_{j=1}^{m} \frac{C_{m-j+1}}{(j-1)!} \left(\frac{T}{4}\right)^{m-j+1} \left[\frac{P}{Q_m}\right]^{(j-1)}_{p=o} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{k-j}}{(j-1)!} \frac{1}{p_i^{k+1-i}} \left[\frac{P}{Q_k} \text{ th } \frac{Tp}{4}\right]^{(j-1)}_{p=p_i} \qquad (\text{I-2-g})$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = - l_o - \sum_{j=1}^{m} \frac{C_{m-j}}{(j-1)!} \left(\frac{T}{4}\right)^{m-i} \left[\frac{P}{Q_m}\right]^{(j-1)} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{P}{Q_k} \text{ th } \frac{Tp}{4}\right]^{(k-1)}_{p=p_i} \qquad (\text{I-3-g})$$

avec : $q_o = \lim\limits_{p \to \infty} L(p)$ $\qquad$ C_j tel que $\text{th } x = \sum_{j=o}^{\infty} C_j x^j$

$l_o = \lim\limits_{p \to \infty} pL(p)$ $\qquad$ $0! = 1$

I - 4 - CONSTRUCTIONS

I - 4 - 1 - Lieux de Cypkin :

Cette construction est classique . On se limitera à l'énoncé bref de son principe .

La fonction $\Lambda(\omega)$ de Cypkin (I-6) a pour partie réelle , si $q_o = 0$:

$$\mathrm{Re}\,\Lambda(\omega) = \frac{4M}{\pi} \sum_n A(n\omega) \cos \Phi(n\omega) \qquad (\text{I-4-6})$$

$$n = 2k-1 \quad k = 1 , 2 , 3 \ldots$$

et pour partie imaginaire si $l_o = 0$:

$$\mathrm{Im}\,\Lambda(\omega) = \frac{4M}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} A(n\omega).\sin \Phi(n\omega) \qquad (\text{I-5-6})$$

$$n = 2k-1 \quad k = 1 , 2 , 3 \ldots$$

En séparant aussi la fonction de transfert $L(j\omega)$ en partie réelle $U(\omega)$ et complexe $V(\omega)$:

$$U(\omega) = A(\omega) \cos \Phi(\omega)$$

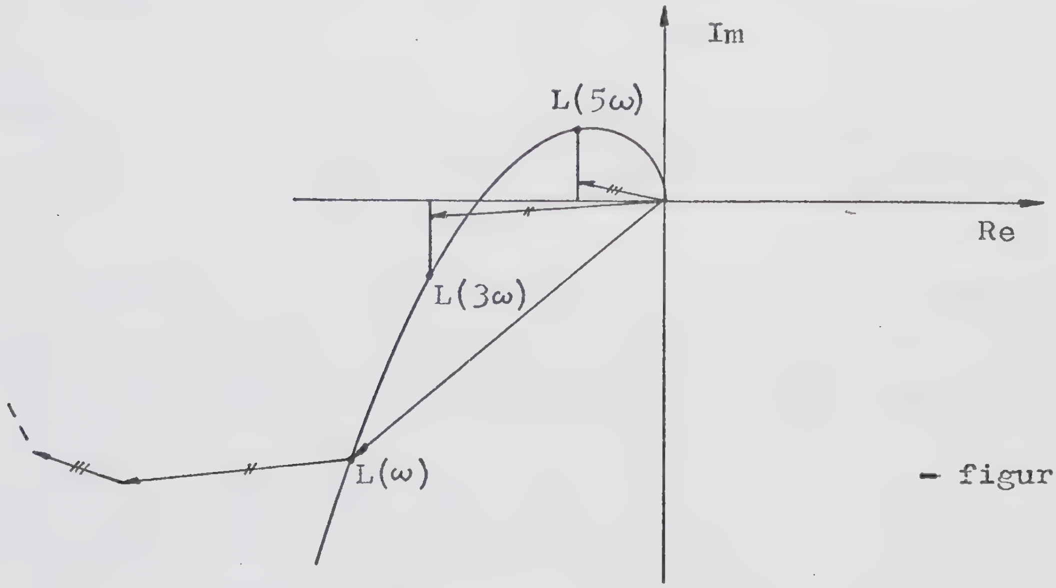
$$V(\omega) = A(\omega) \sin \Phi(\omega)$$

on constate que :

$$\mathrm{Re}\,\Lambda(\omega) = \frac{4M}{\pi}\left(U(\omega) + U(3\omega) + U(5\omega) + \ldots + U((2k+1)\omega) + \ldots \right)$$

$$\mathrm{Im}\,\Lambda(\omega) = \frac{4M}{\pi}\left(V(\omega) + \frac{V(3\omega)}{3} + \frac{V(5\omega)}{5} + \ldots + \frac{V((2k+1)\omega)}{2k+1} + \ldots \right)$$

Ces relations permettent de construire le lieu de Cypkin $\Lambda(\omega)$ à partir du lieu de Nyquist $L(j\omega)$:



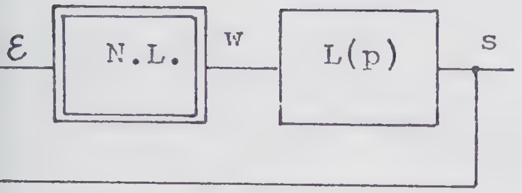
- figure I-7 -

I - 4 - 2 - Lieux de Hamel

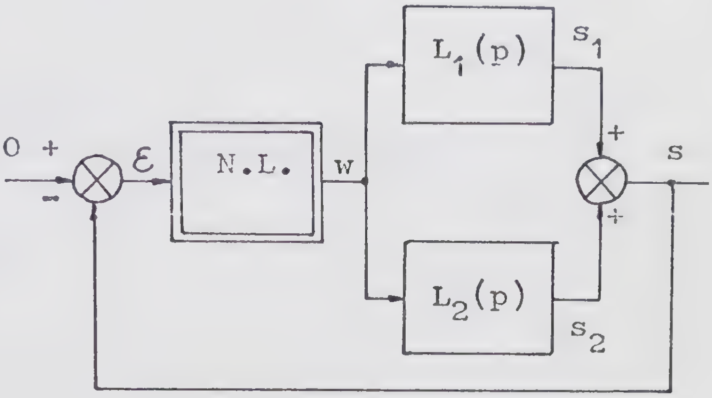
I - 4 - 2 - 1 - Remarques :

Les équations obtenues sont lourdes d'emploi . Elles présentent cependant , par opposition à la formulation de Cypkin , l'intérêt de se présenter sous forme de séries finies . Si on dispose d'une méthode permettant de connaître simplement chaque terme des séries de Hamel pour une fonction de transfert $L(p)$ quelconque , le lieu de Hamel associé à $L(p)$ se déduira donc par sommation .

Soient $L_1(p)$ et $L_2(p)$ deux fonctions de transfert telles que $L(p) = L_1(p) + L_2(p)$. Les schémas I-1 et I-8 sont donc équivalents et $s_1 + s_2 = s$.



- figure I-1 -



- figure I-8 -

La démonstration donnée en I-2-1 peut être renouvelée en remplaçant L par $L_1 + L_2$. On trouvera alors que si H , H_1 et H_2 sont les lieux de Hamel respectivement associés à L , L_1 et L_2 :

$$H = H_1 + H_2$$

Conclusion : Si on connait les lieux de Hamel associés à deux (ou plusieurs) fonctions de transfert de base , on connaîtra ceux qui sont associés à toute fonction combinaison linéaire de ces fonctions de base.

I - 4 - 2 - 2 - Construction :

Le fractionnement de L(p) peut être une décomposition en éléments simples ou un morcellement quelconque : il suffit que l'on connaisse les lieux de Hamel associés à chacun des produits de la décomposition choisie pour être en mesure de satisfaire au problème .

ex. $$L(p) = \frac{1+p}{p^2(1+ap)^2}$$

pourra se décomposer en :

$$\left.\begin{aligned} L_{11} &= \frac{1}{p^2(1+ap)^2} \\ L_{12} &= \frac{1}{p(1+ap)^2} \end{aligned}\right] \quad L = L_{11} + L_{12}$$

ou en :

$$\left.\begin{aligned} L_{21} &= \frac{1}{p^2} \\ L_{22} &= \frac{1-2a}{p} \\ L_{23} &= \frac{a(a-1)}{(1+ap)^2} \\ L_{24} &= \frac{a(2a-1)}{1+ap} \end{aligned}\right] \quad L = L_{21} + L_{22} + L_{23} + L_{24}$$

Suivant que l'on disposera d'une table de lieux de Hamel plus ou moins complète .

On trouvera en annexe un recueil d'équations permettant d'établir rapidement l'équation du lieu de Hamel associé à toute fonction de transfert contenant au plus :

- cinq intégrations
- des pôles réels d'ordre de multiplicité inférieur ou égal à cinq
- des pôles complexes conjugués simples ou doubles

On pourra aussi utiliser les abaques de l'annexe pour construire graphiquement un lieu par le même procédé de combinaison linéaire .

I - 5 - CONSEQUENCES PRATIQUES

I - 5 - 1 Propriétés et limites des lieux de Hamel-Cypkin :

Les lieux de Hamel (et ceux de Cypkin à une transformation près) sont les lieux des conditions initiales donnant un régime périodique sans phase transitoire intermédiaire . Donc , pour une fonction de transfert L(p) , on connaîtra la valeur de sa sortie s(t) ainsi que celle de sa dérivée s'(t) lors de la commutation du relais à l'aide du lieu de Hamel associé ; pour connaître les dérivées suivantes de s à la commutation , dans la mesure où elles ont un sens , il faudra disposer du lieu associé à $p^k L(p)$ (donnant $s^{(k)}$ et $s^{(k+1)}$) .

Si L(p) est le rapport de deux pôlynomes P et Q , on a vu que le lieu de Hamel n'existe que si le degré m du numérateur P est inférieur au degré n du dénominateur Q .

Par conséquent on ne pourra associer un lieu de Hamel à $p^k L(p)$ que si :

$$m+k < n$$

Si l'on veut pouvoir placer le système directement en cycle limite , il faut connaître s et ses n-1 premières dérivées . La méthode de Hamel-Cypkin sera applicable pour k variant de 0 à n-m-1 ; pour cette dernière valeur on obtiendra $s^{(n-m-1)}$ et $s^{(n-m)}$.

On voit donc que :

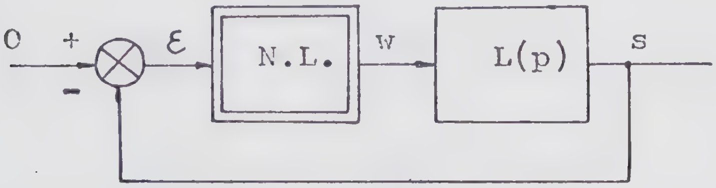
- si $m \leq 1$ on dispose des informations nécessaires
- si $m > 1$ il manque la connaissance de

$$(n-1) - (n-m) = m-1 \qquad \text{dérivées de } s$$

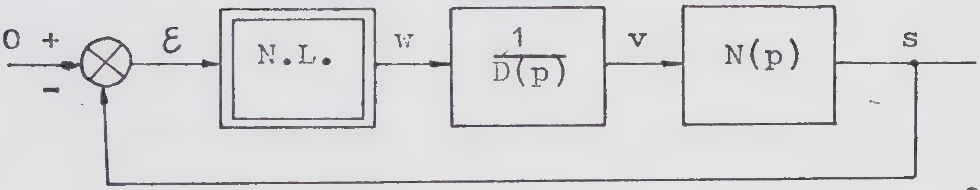
I-5-2- Obtention directe du cycle limite :

I-5-2-1- Equations :

A s(t) on associe une variable auxiliaire v(t) telle que :



- figure I-1 -



- figure I-9 -

avec $L(p) = \dfrac{b_o+b_1p+\ldots+b_mp^m}{a_o+a_1p+\ldots+a_np^n} = \dfrac{N(p)}{D(p)}$

S'il existe un régime périodique limite pour s(t) , ses caractéristiques T et ρ seront données par la méthode de Hamel-Cypkin .

s(t) étant périodique , v(t) le sera aussi avec la même période T ; sa valeur à la commutation (de 0 à + M) ainsi que celles de ses n-1 dérivées , sera donnée encore par la méthode de Hamel-Cypkin mais appliquée à :

$$\frac{p^i}{D(p)} \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1 \qquad \text{pour T et } \rho$$

la dérivée i-ème de v étant donnée par la formule d'ordre i

Donc , à moins que m soit nul ($\Rightarrow s \equiv v$) , on ne peut pas connaître toutes les dérivées de s à la commutation mais par contre celles de v sont parfaitement définies . Le schéma analogique linéaire permettant de simuler le comportement du système en régime permanent se déduit donc naturellement des relations impliquées par la figure I-9 .

$$w(t) = a_o v + a_1 \frac{dv}{dt} + \ldots + a_n \frac{d^n v}{dt^n} \qquad (\text{I-7})$$

$$s(t) = b_o v + b_1 \frac{dv}{dt} + \ldots + b_m \frac{d^m v}{dt^m} \qquad (\text{I-8})$$

On peut remarquer les points suivants :

- l'équation (I-7) , complétée par les conditions initiales obtenues plus haut , peut être intégrée sans faire intervenir de dérivation (voir figure I-10) .

- s(t) s'obtient également sans dérivation à l'aide des valeurs des $v^{(i)}$ fournies par (I-7) puisque $m < n$.

- on peut déduire de (I-8) un certain nombre de dérivées de s , toujours sans effectuer de dérivation ; en effet :

$$s^{(k)} = b_o\, v^{(k)} + b_1\, v^{(k+1)} + \ldots + b_m\, v^{(k+m)} \qquad (\text{I-8-k})$$

donc $s^{(k)}$ est calculable à partir des valeurs de $v^{(i)}$ fournies par (I-7) tant que :

$$m + k \leqslant n$$

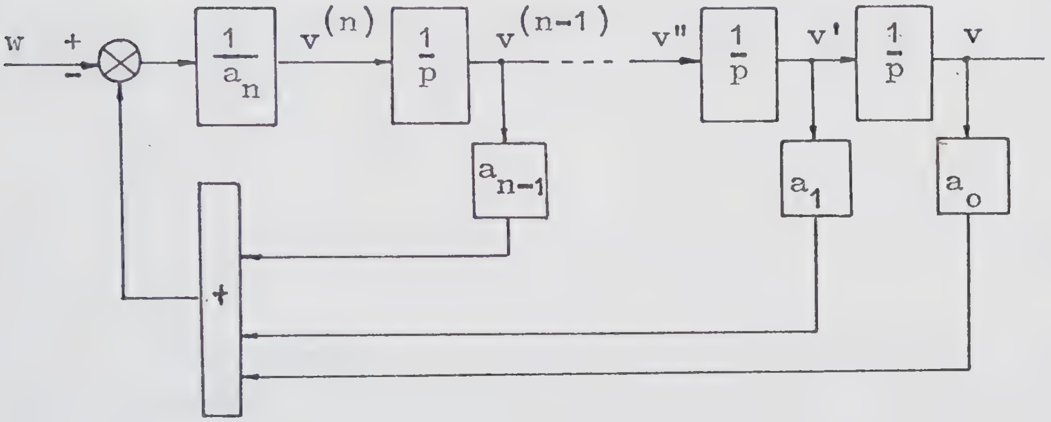
on retrouve la contrainte signalée au paragraphe précédent (I-5-1) à la différence près que l'inégalité n'est plus stricte à présent ; en réalité il ne s'agit pas d'une différence puisque la connaissance de v et de ses n-1 dérivées permet de déduire , à l'aide de l'équation (I-7) la dérivée n-ième ; chacun des procédés conduit donc à la même information pour s(t) .

I - 5 - 2 - 2 - Schémas analogiques :

De façon classique , on modifie l'équation (I-7)

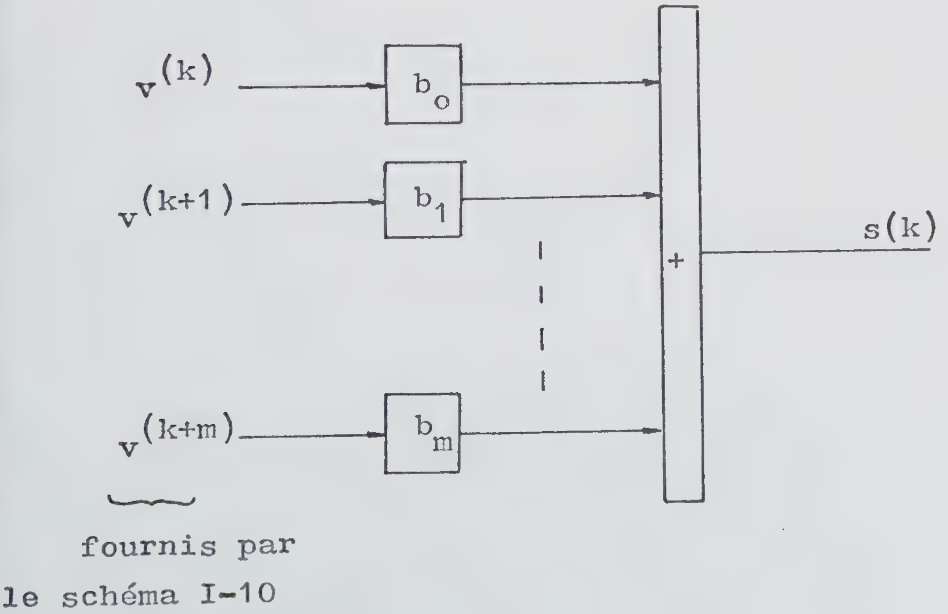
$$\frac{d^n v}{dt^n} = \frac{1}{a_n} \quad w - \left(a_o v + a_1 \frac{dv}{dt} + \ldots + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v}{dt^{n-1}} \right) \qquad (1\text{-}7\text{-bis})$$

dont on tire le schéma de simulation analogique :



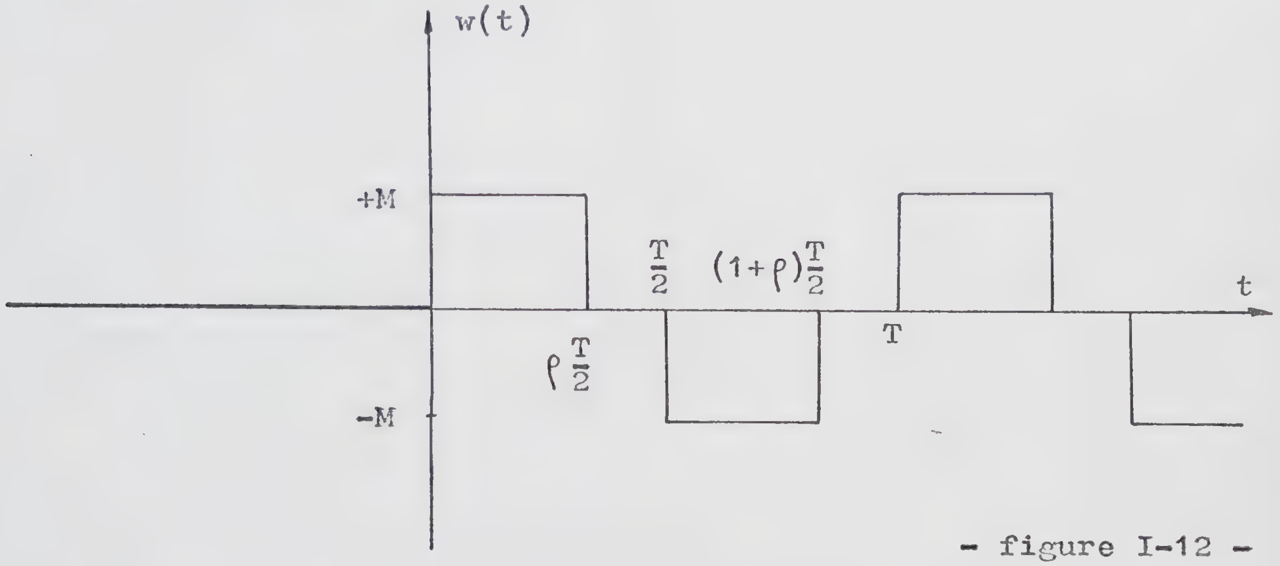
- figure I-10 -

De même , à partir de l'équation (I-8-k) , on obtient :



- figure I-11 -

Les conditions initiales des intégrateurs étant données par la méthode de Hamel-Cypkin de même que les caractéristiques T et ρ de l'oscillation , on est donc en mesure de simuler directement le régime permanent du système à l'aide du schéma I-10 ; l'entrée w(t) sera :



- figure I-12 -

Bien entendu , la simulation sur une période est suffisante pour répondre au problème ; on pourra même se limiter à l'étude d'un demi-cycle si le "plus-ou-moins" a une caractéristique symétrique (l'oscillation est alors identique à elle-même , au signe près , sur chaque demi-période). [17]

II - ALGORITHMES DE CALCULS .

II - 1 - PRINCIPES .

II - 1 - 1 - Schéma fonctionnel - Paramètres :

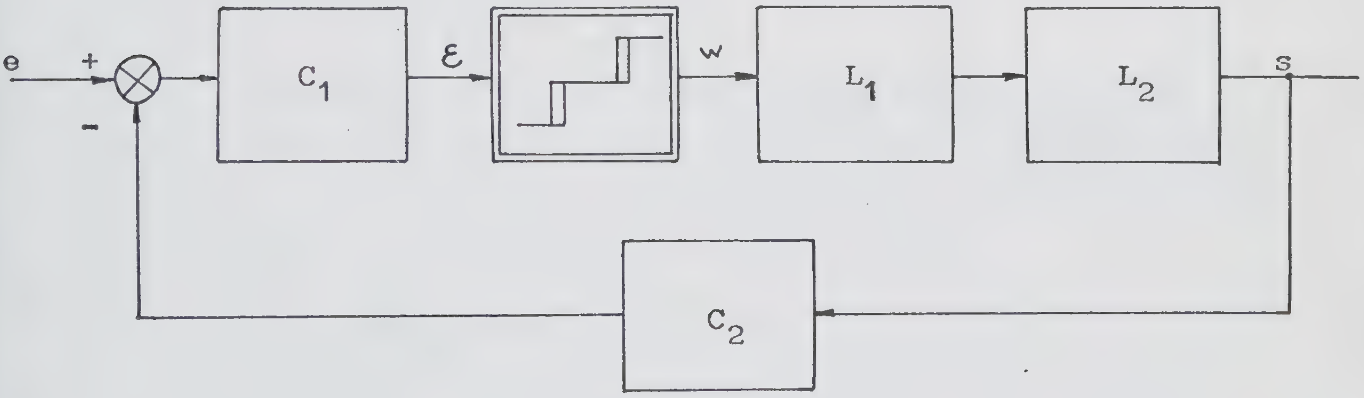
Le choix du schéma fonctionnel influe sur toute la suite du travail . Il est donc soumis à des contraintes .

Le " plus-ou-moins " , étant un organe fortement amplificateur , doit se trouver immédiatement en amont de la chaîne de puissance .

Les correcteurs , s'il en existe , peuvent être placés en chaîne directe (sur le signal d'erreur) ou en contre-réaction .

Certaines parties du système à réguler sont susceptibles d'être modifiées tandis que d'autres sont imposées à priori .

On est donc conduit à proposer le schéma fonctionnel suivant , l'élément " tout-ou-rien " étant supposé être le seul organe non linéaire :



- figure II-1

où :

C_1 et C_2 sont des correcteurs .

L_1 la partie modifiable du système à asservir .

L_2 la partie fixe du système à asservir .

Les paramètres qui doivent être optimisés sont donc :

- les coefficients des différentes fonctions de transfert modifiables .
- le seuil et l'hystérésis de la non-linéarité .

II - 1 - 2 - Critère et contraintes :

On désire minimiser la pulsation de l'auto-oscillation éventuelle du système , on cherche donc :

$$\omega \text{ minimum}$$

avec les contraintes évidentes :

$\omega > 0$ (pulsation ayant un sens physique)

$0 < \rho \leqslant 1$ (imposé par la définition , paragraphe I-2-2)

On veut aussi que l'amplitude du cycle limite reste bornée, on doit donc essayer d'obtenir en régime permanent :

$$|s| \leqslant \text{borne} \ (= 5/1000 \text{ dans l'application proposée })$$

L'existence d'une auto-oscillation stable implique le respect des conditions de périodicité énoncées au paragraphe I-1-2 ; c'est à dire que , le système étant ramené par transformations à la figure I-1 , il faut vérifier :

$$\frac{d\varepsilon}{dt}\left(\frac{T}{2}\right) < 0$$

et

$$\frac{d\varepsilon}{dt}\left(\rho\,\frac{T}{2}\right) < 0$$

Il est nécessaire également d'être informé sur les performances dynamiques futures du système . Après un certain nombre d'expériences , on a choisi de simuler sa réponse indicielle.

Cet essai a semblé le plus facile et le plus rapide à mettre en oeuvre à l'aide des sous-programmes de calcul déjà élaborés pour les points précédents . On évaluera donc la rapidité du système à l'aide du temps d'atteinte du premier rebondissement (il y en aura un puisque le régime final est oscillant) ; on tirera une information sur sa précision de la valeur de ce rebondissement ; un test de stabilité locale sera fourni par l'amortissement (ou non) de l'oscillation résultante .

II - 1 - 3 Méthodes de calcul :

II - 1 - 3 - 0 Remarque préliminaire :

Il est normal d'envisager l'emploi de la méthode du premier harmonique : les lieux critiques associés à des non linéarités du type " plus-ou-moins " sont relativement simples à établir et à utiliser .

Cette méthode n'est applicable que si les régimes périodiques envisagés ont des pulsations suffisamment élevées par rapport aux pulsations de coupure des éléments linéaires placés en aval des non-linéarités . Or on se propose de rechercher des valeurs de paramètres conduisant à l'obtention d'une pulsation d'oscillation minimum . Il est donc très probable qu'en général l'emploi des techniques de linéarisation harmonique conduirait à des résultats grossiers ou totalement faux .

II - 1 - 3 - 1 Etude de l'auto-oscillation :

Les méthodes de Hamel-Cypkin donnent les caractéristiques du cycle limite lors lors d'une commutation de 0 à + 1 du relais (le gain M du relais sera inclus dans la partie linéaire qui suit) .

L'application de la méthode proposée en I-5-2permet de trouver les conditions initiales donnant directement le régime permanent .

En simulant alors le système sur un demi-cycle (voir schémas en I-5-2-2) on peut noter la valeur maximum prise par l'amplitude de la sortie afin de la comparer à la borne fixée à l'avance .

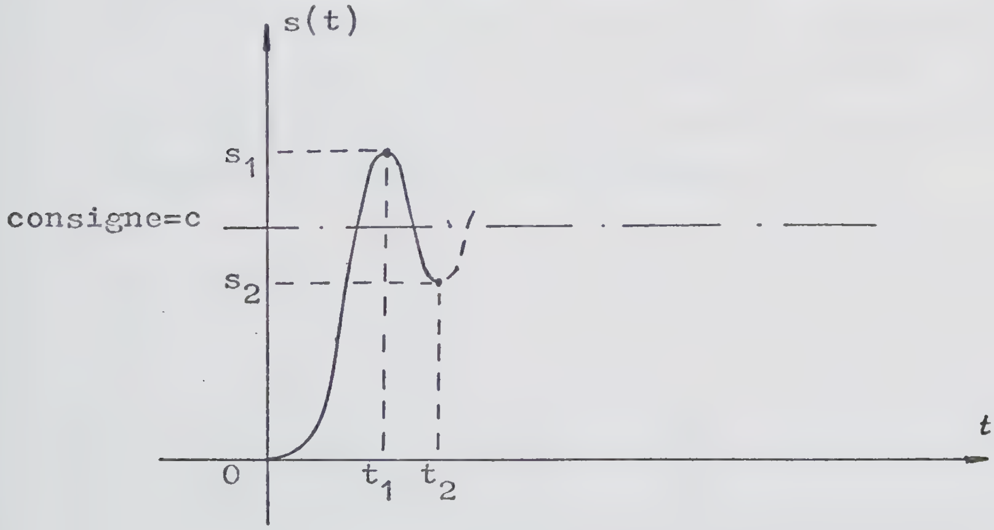
II - 1 - 3 - 2 Performances dynamiques :

On a choisi de simuler une réponse indicielle .

Le système est mis au repos (conditions initiales nulles) et on étudie sa réponse à un échelon dont l'amplitude est choisie en foction de la nature du système à piloter .

Il est en effet certain qu'une variation importante et brutale de la consigne peut n'avoir aucun sens dans certains cas ; en particulier , pour un réacteur nucléaire , les variations de la consigne sur la puissance ne seront jamais que très lentes (sauf accident) .

Pour réduire le temps de calcul , on limite la simulation à l'obtention des deux premiers extrêmums de la réponse .



- figure II-2 -

t_1 permet d'évaluer la rapidité du système .

s_1 informe sur sa précision .

s_2 donne une indication sur l'amortissement (ou le non-amortissement) de la réponse par comparaison avec C et s_1

II - 1 - 3 - 3 Minimisation de la valeur du critère :

La méthode de recherche de minimum ne doit pas faire appel aux dérivées partielles du critère par rapport aux paramètres . Leur calcul mathématique n'est pas possible et leur évaluation numérique implique des temps de calcul trop importants .

Compte tenu de cette remarque la méthode employée sera explicitée plus loin , au paragraphe II-3-1 (page 43 et suivantes) .

II - 1 - 3 - 4 Applications des formules de Hamel-Cypkin :

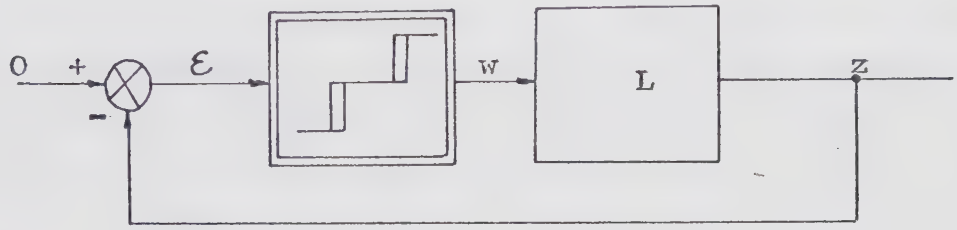
D'autre part , on a vu qu'à un seuil Δ et une hystérésis h du relais , les formules de Hamel-Cypkin permettent d'associer une oscillation de caractéristiques T et ρ (paragraphe I-1-2) . Il est cependant beaucoup plus simple de choisir T et ρ et d'en déduire Δ et h car les formules sont implicites dans le premier cas et explicites dans le deuxième (paragraphe I-2-2) .

On prend donc T et ρ comme paramètres , le seuil et l'hystérésis deviennent des valeurs résultantes dont on se contente de vérifier le sens physique .

II - 2 - ALGORITHMES .

II - 2 - 1 Seuil et hystérésis :

Le schéma fonctionnel figure II-1 , pour e = o , est transformé ainsi que le montre la figure II-3 .



- figue II-3 -

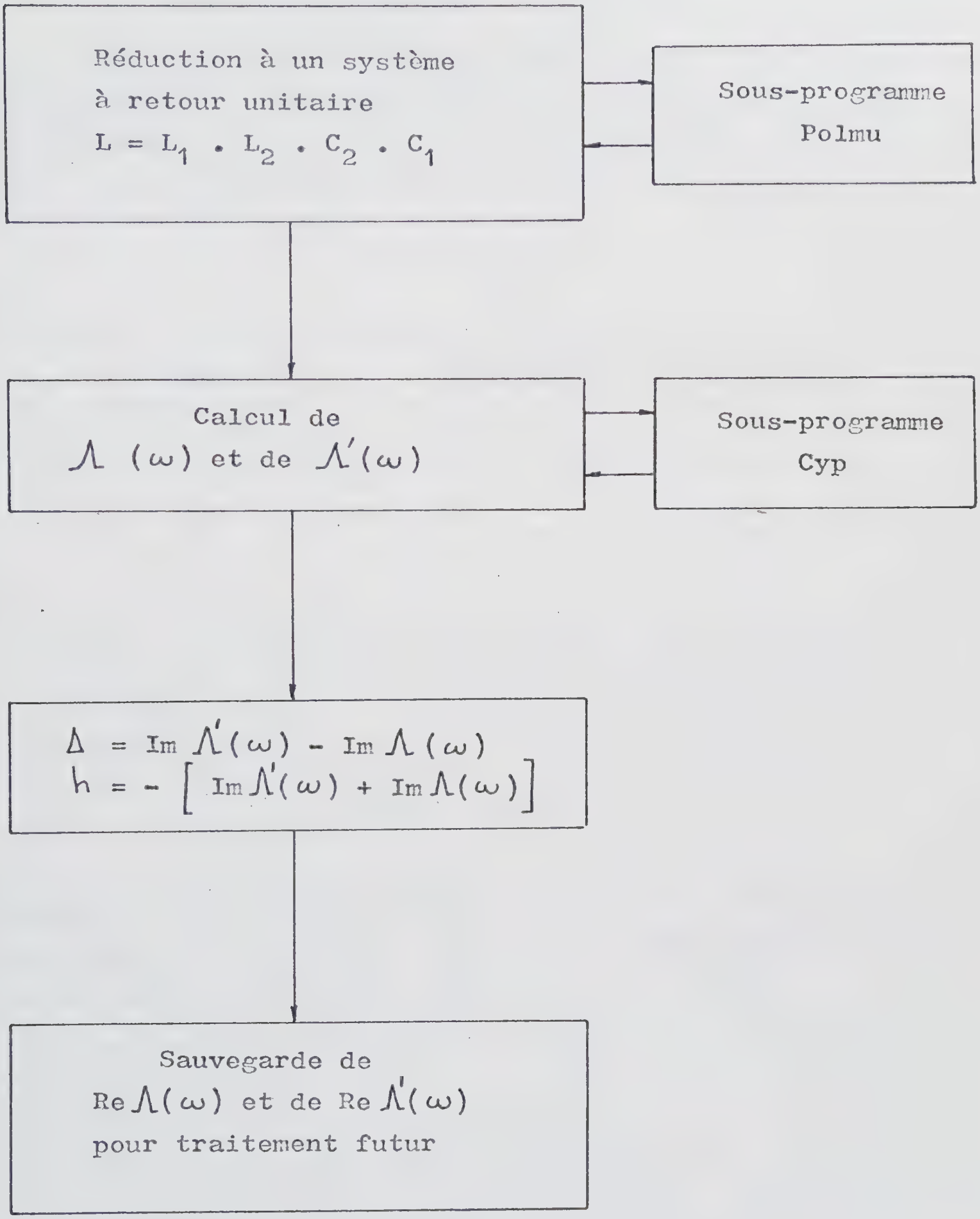
avec $L = L_1 \cdot L_2 \cdot C_2 \cdot C_1$

A ce système on peut appliquer la méthode de Hamel-Cypkin pour déduire les valeurs de Δ et h donnant une oscillation de caractéristiques T et ρ .

L'organigramme de calcul est donné figure II-4 .

On a établi divers sous-programmes de calcul :

- Polmu qui calcule L par multiplications respectives des polynômes formant les numérateurs et dénominateurs de L_1 , L_2 , C_1 et C_2 .
- Cyp qui détermine les valeurs des fonctions de Cypkin $\Lambda(\omega)$ et $\Lambda'(\omega)$ associées à L pour $\omega = \frac{2\pi}{T}$.



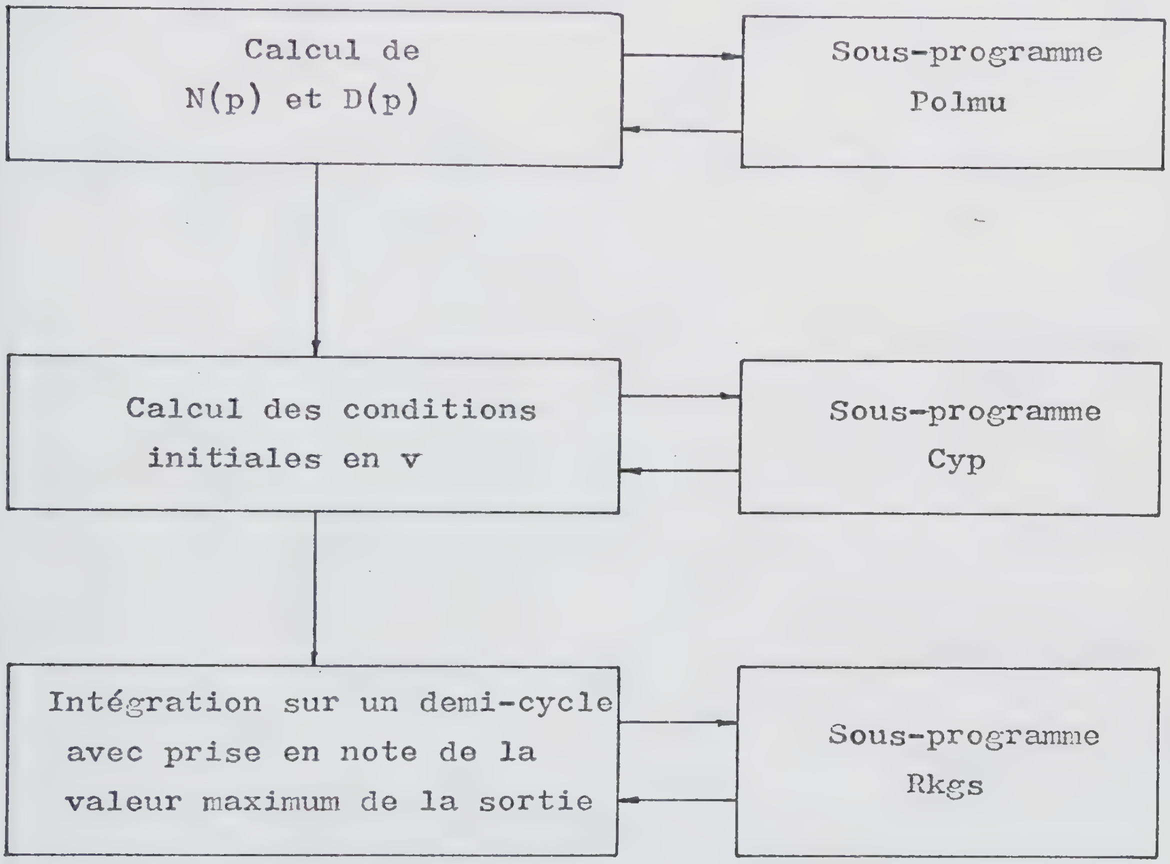
- figure II-4 -

Polmu multiplie des polynômes

Cyp calcule la valeur des fonctions de Cypkin $\Lambda(\omega)$ et $\Lambda'(\omega)$

II - 2 - 2 Amplitude maximum d'oscillation :

Le principe de calcul se déduit directement des schémas analogiques du paragraphe I-5-2-2 , figures I-9 et I-10 : la variable v est mise en évidence par la séparation du produit $L_1 \cdot L_2$ en dénominateur D(p) permettant de calculer v et en numérateur N(p) donnant la sortie s .

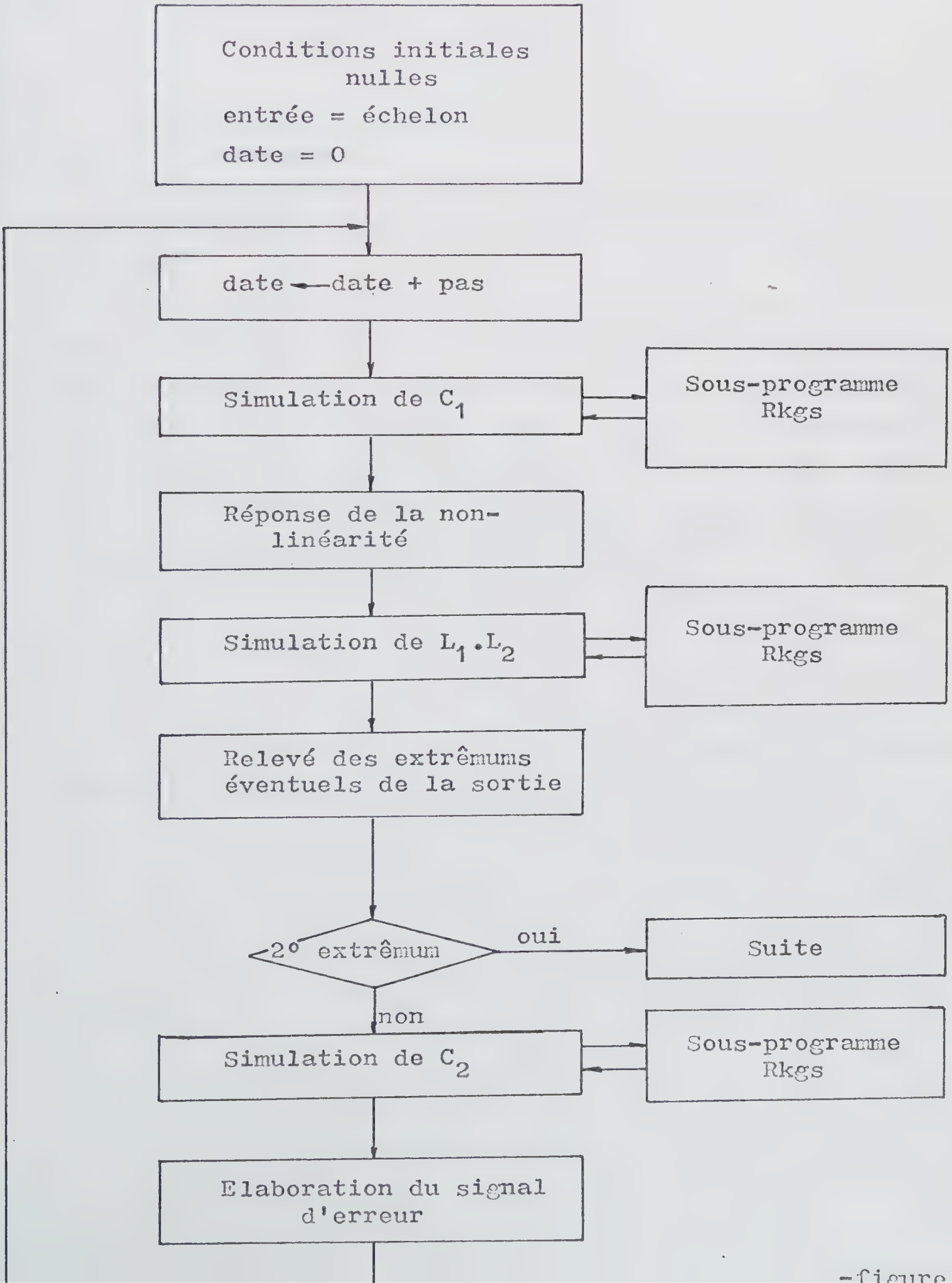


- figure II-5 -

Polmu	multiplie des polynômes
Cyp	calcule la valeur des fonctions de Cypkin $\Lambda(\omega)$ et $\Lambda'(\omega)$
Rkgs	intègre des équations différentielles

II - 2 - 3 Réponse indicielle :

On utilise la méthode qui a permis l'étude en régime permanent . Chaque élément linéaire est simulé suivant les schémas I-9 et I-10 .



-figure II-6 -

II - 3 MISE EN OEUVRE SUR CALCULATEUR NUMERIQUE

II - 3 - 1 " La méthode du simplexe "

II - 3 - 1 - 1 Choix de l'algorithme :

L'adoption d'un algorithme de recherche d'extrêmum est un problème délicat .

L'efficacité des différentes solutions que l'on peut trouver dans la littérature varie avec le problème traité[8] , [9],[10].

Celles qui font appel aux dérivées partielles du critère par rapport aux paramètres sont à exclure (paragraphe II-1-3-3) ainsi que celles qui convergent mal au voisinage d'arêtes sur l'hypersurface du critère (dans l'espace des paramètres) .

Les essais effectués par [8] et [10] semblent montrer que " la méthode du simplexe " répond aux exigences énoncées ; elle est , en outre , simple à programmer et paraît converger assez rapidement même dans des cas difficiles .

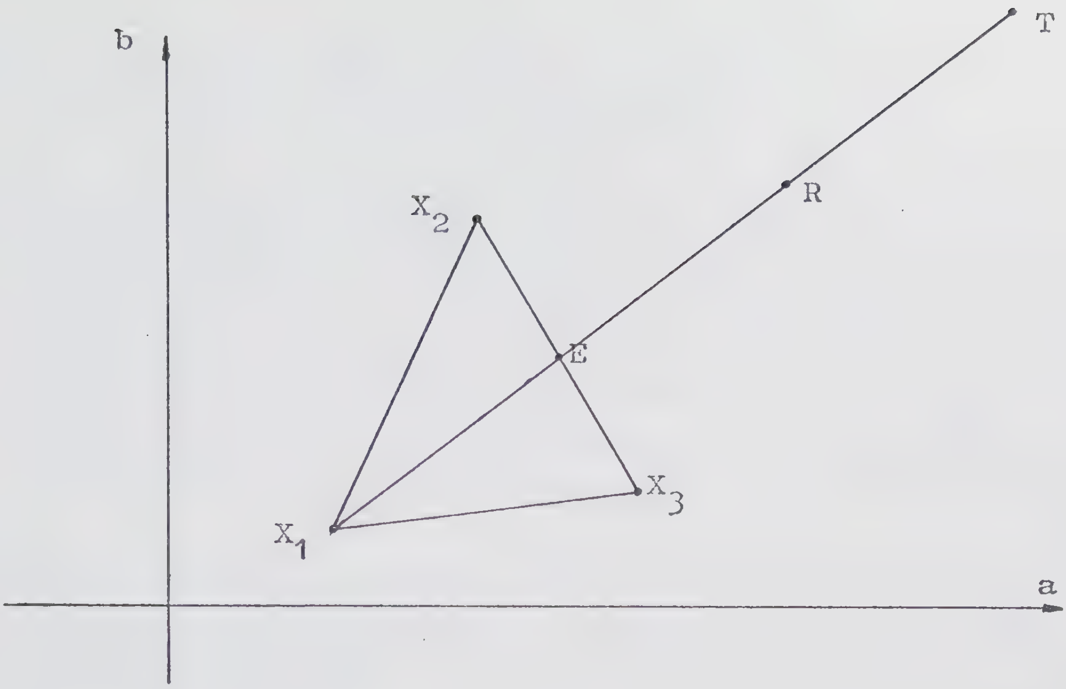
II - 3 - 1 - 2 Principe :

On se limitera à son énoncé sur un exemple ; pour plus de justifications on pourra se reporter à [8] et à [9] .

Soit la fonction C positive dépendant de deux paramètres a et b ; on désire rechercher un minimum de C , s'il existe .

On prend , dans l'espace des paramètres , un nombre de points égal à la dimension de l'espace plus une unité . Pour l'exemple choisi on prend donc trois points X_1 , X_2 , X_3 ; on suppose :

$$C(X_1) > C(X_2) > C(X_3)$$



- figure II-7 -

On détermine alors le point R tel que :

- E est le centre de gravité de X_2 et X_3 affectés de masses égales .
- $\overrightarrow{X_1E} = \overrightarrow{ER}$.

et on calcule C(R) .

- si $C(R) > C(X_1)$, on adopte M , centre de gravité de X_1 , X_2 , X_3 affectés de masses égales .
- si $C(R) < C(X_1)$, deux cas sont à envisager :
  1°) $C(R) > C(X_3)$ on adopte le point R .
  2°) $C(R) < C(X_3)$ on détermine le point T tel que $\overrightarrow{X_1T} = k\ \overrightarrow{X_1E}$ (k: gain d'accélération défini ultérieurement) et on calcule C(T) .
  - . si $C(T) < C(R)$ on adopte le point T.
  - . si $C(T) > C(R)$ on adopte le point R .

On remplace alors X_1 par le point adopté et on recommence le même processus .

En général on obtient une convergence vers un minimum de C . Ce minimum n'est pas nécessairement unique , il est possible d'en trouver d'autres en déplaçant les points de départ .

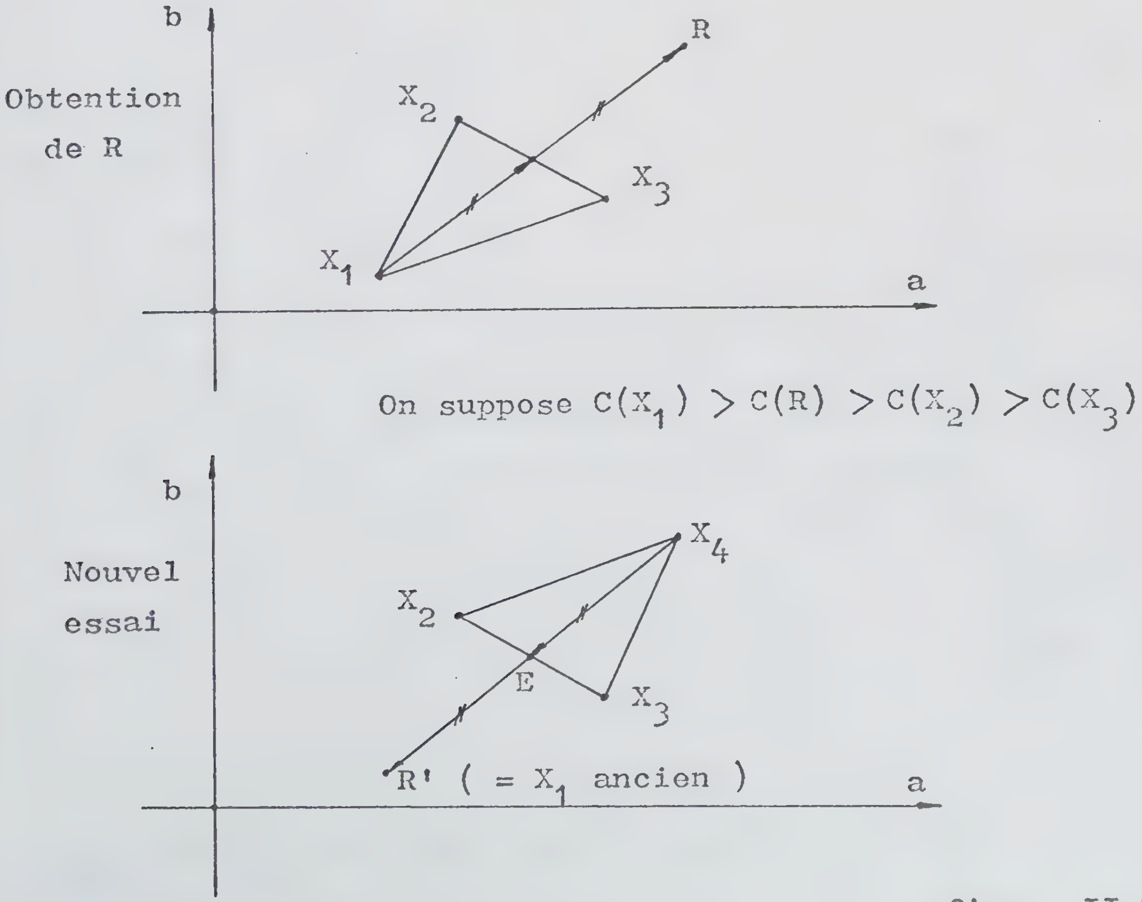
La suite des points adoptés est telle qu'il n'est pas possible d'obtenir une dégénérescence de l'algorithme (choix d'un point appartenant à l'hyperplan défini par les n autres) .

II - 3 - 1 - 3 Organigramme de calcul :

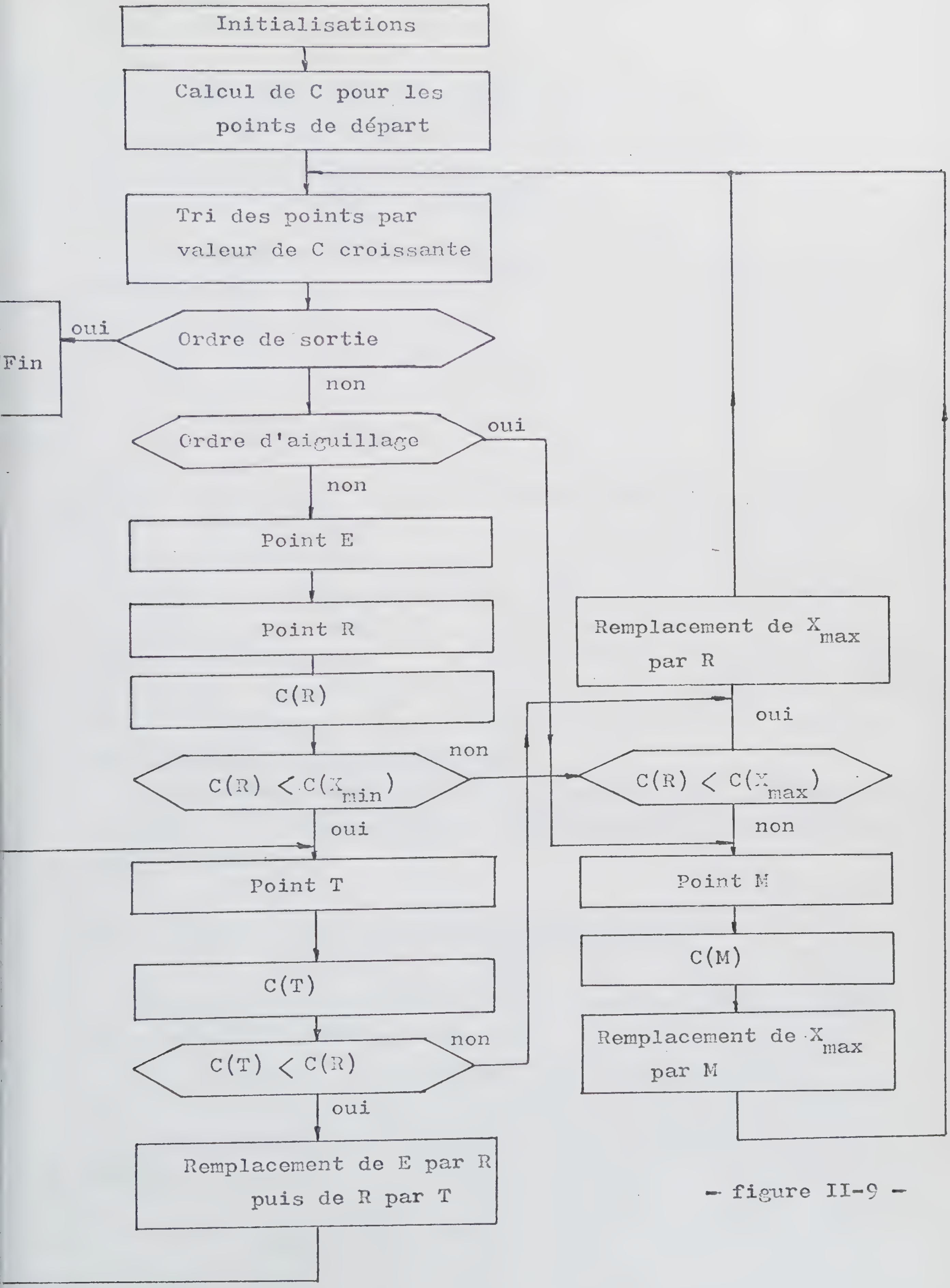
La solution adoptée permet :

- un choix automatique du gain k d'accélération : le remplacement de E par R et de R par T (voir figure II-9) équivaut à choisir k croissant comme les termes d'une suite de Fibonnacci ($k_{n+1} = k_n + k_{n-1}$ avec $k_1 = 1$ et $k_2 = 2$) ; cette suite permet au programme de choisir une bonne valeur de k compatible avec un traitement aussi réduit que possible .

- d'éviter un essai obligatoirement infructueux lorsque le dernier point adopté est du type R et se trouve être le plus mauvais des points restants . Dans ce cas , si on respecte la règle énoncée , il faudrait faire d'abord une tentative avec le point R' qui n'est autre que l'ancien point X_1 (voir figure II-8) : ce choix est par conséquent voué à l'échec , il vaut donc mieux passer directement à la phase de repli , à savoir l'adoption du centre de gravité M des points X_2 , X_3 , X_4 .



- figure II-8 -



– figure II-9 –

X_{min} est le point associé à la plus petite valeur de C

X_{max} est le point associé à la plus grande valeur de C

II - 3 - 2 Elaboration du critère :

II - 3 - 2 - 1 Méthode d'évaluation :

Aux paragraphes II-1-2 et II-1-3 ont été énoncés les principes qui vont conduire à affecter un critère C à tout point de l'espace des paramètres .

On prend comme valeur initiale de C :

$$C_1 = a\omega^2 + b\ t_1^2$$

ω est la pulsation de l'oscillation limite et t_1 le " temps de pic " défini figure II-2 ; a et b sont des coefficients arbitraires positifs fixés par l'expérience en fonction du paramètre que l'on désire prédominant . On a utilisé a=b=1 .

Pour tenir compte des contraintes il existe des méthodes théoriques données par le calcul de variations . Le traitement extrêmement complexe qu'elles impliquent (résolution de fonctions implicites et calcul de dérivées partielles) conduit à les rejeter à priori dans ce cas .

La méthode des " fonctions de pénalisation " [9] permet d'aborder ce problème beaucoup plus simplement du point de vue analyse numérique .

II - 3 - 2 - 2 Les fonctions de pénalisation :

A chaque contrainte on associe une fonction p_i continue dite de pénalisation et telle que :

$p_i = 0$ si la contrainte est satisfaite .

$p_i > 0$ si la contrainte n'est pas satisfaite .

Par exemple la pulsation ω doit être positive ou nulle pour avoir un sens physique ; on prendra :

$$p_\omega = 0 \quad \text{si } \omega \geqslant 0$$
$$p_\omega = -\omega \quad \text{si } \omega < 0$$

On cherche alors à minimiser le critère :

$$C = C_1 + K \sum_i p_i$$

C_1 est le critère défini en II-3-2-1 .
K est une constante positive .

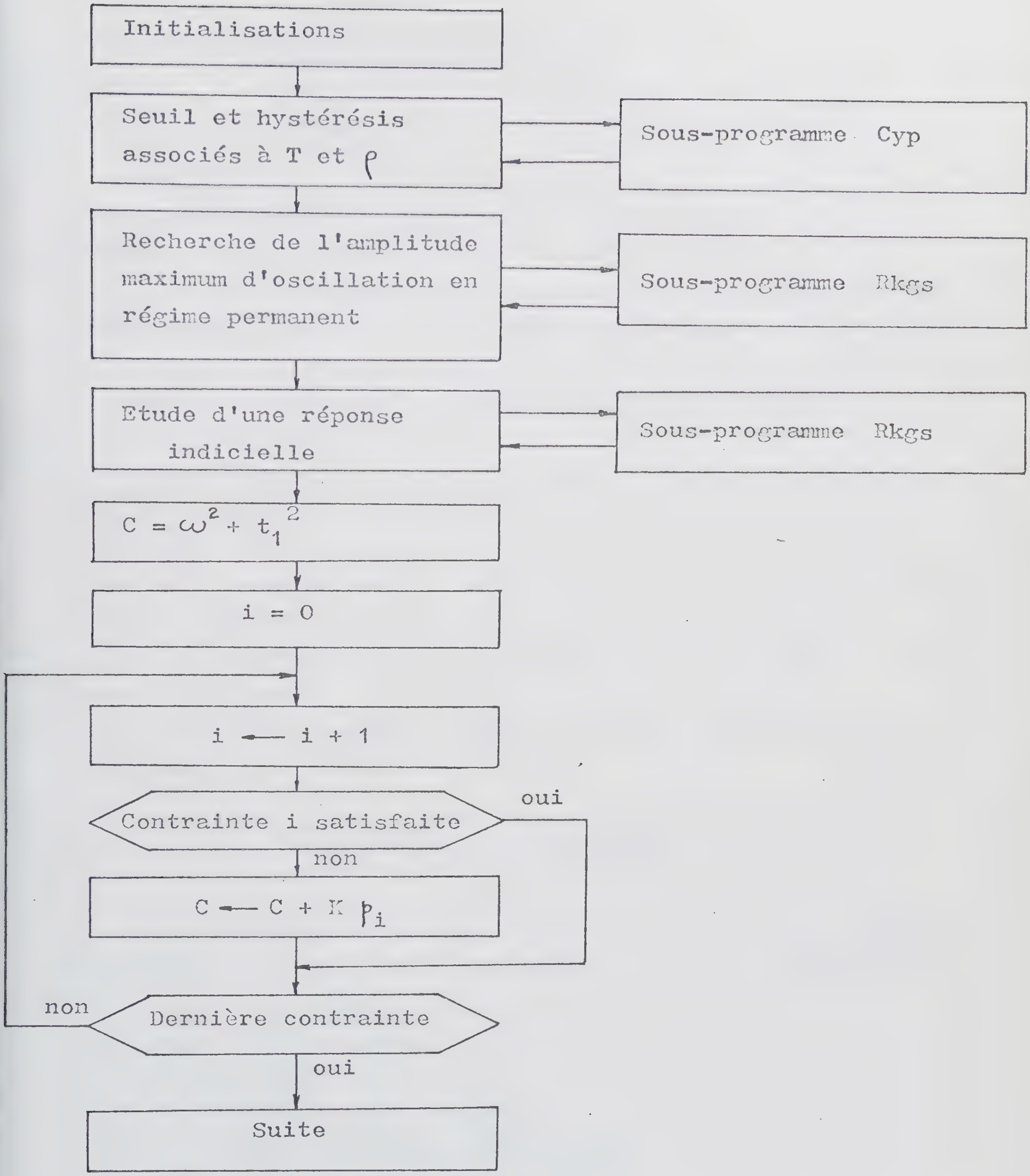
Intuitivement on voit que lorsque K tend vers l'infini , le minimum que l'on pourra trouver pour C tendra vers un domaine , s'il en existe un , où les contraintes seront satisfaites . Ce résultat peut se démontrer avec rigueur [9] .

II - 3 - 2 - 3 Organigramme de calcul :

Chaque fonction de pénalisation est prise égale au module de l'écart par rapport à la contrainte à laquelle elle est associée .

Les différentes contraintes prises en compte sont :

- $\omega \geqslant 0$ (pulsation ayant un sens physique) .
- $0 < \rho \leqslant 1$ (définition de ρ) .
- oscillation limite stable (cf I-1-2) .
- valeur maximum de l'amplitude d'oscillation en régime permanent inférieur à une borne fixée à l'avance (5 / 1000 dans le cas de l'application) .
- valeur du premier dépassement de la réponse indicielle inférieure à une autre borne choisie à priori .
- stabilisation (apparente) de l'oscillation de la réponse indicielle (cf II-1-3-2) .


Initialisations
Seuil et hystérésis associés à T et ρ
Sous-programme Cyp
Recherche de l'amplitude maximum d'oscillation en régime permanent
Sous-programme Rkgs
Etude d'une réponse indicielle
Sous-programme Rkgs
C = ω² + t₁²
i = 0
i ← i + 1
Contrainte i satisfaite
oui
non
C ← C + K pᵢ
non
Dernière contrainte
oui
Suite

- figure II - 10 -

II - 3 - 3 Méthode de Hamel-Cypkin :

II - 3 - 3 - 1 Remarques :

La convergence des séries de Hamel-Cypkin est parfois lente ; cela se produit en particulier lorsque :

- la différence entre les degrés du numérateur et du dénominateur de la partie linéaire est faible .
- la pulsation choisie est petite devant les pulsations de coupure des éléments linéaires placés en aval du "plus-ou-moins" .

Dans ce cas la méthode du premier harmonique ne s'applique pas ; c'est cependant dans ces conditions que l'on aura à effectuer l'étude : en effet la forme de la fonction de transfert sera imposée par le système physique et on recherchera un fonctionnement à la fréquence la plus basse possible .

Le nombre de termes à prendre en compte dans les séries sera donc élevé .

Les organigrammes d'application ont été donnés en II-2-1 et II-2-2 .

II - 3 - 3 - 2 Algorithme et organigramme :

Les formules de Cypkin données en I-2-2 sont transformées pour être plus rapidement traitables par calcul automatique .

On appelle :

$$P_n = \sum_k (1- \cos k\rho\pi)\, U (k\omega)$$
$$Q_n = \sum_k \sin k\rho\pi . V (k\omega)$$
$$R_n = \sum_k \sin k\rho\pi \frac{U (k\omega)}{k}$$
$$S_n = \sum_k (1- \cos k\rho\pi) \frac{V (k\omega)}{k}$$

avec $k = 2l + 1$ $\qquad l = 1 , 2 , 3 , \dots , n$.

Par identification avec les formules du paragraphe I-2-2, il vient , si n est grand :

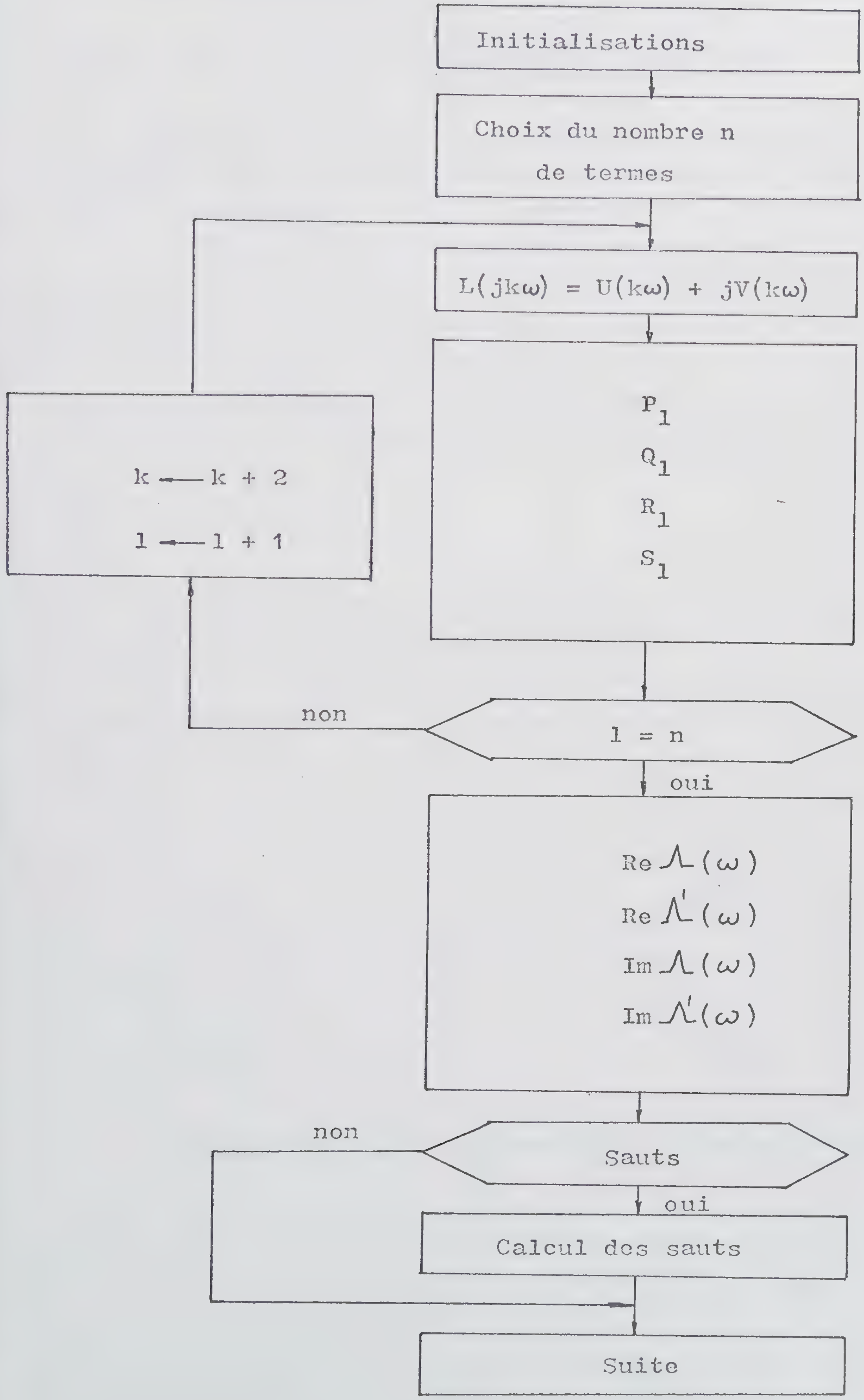
$$\mathrm{Re}\,\Lambda(\omega) \simeq \frac{2M}{\pi} (P_n - Q_n)$$

$$\mathrm{Re}\,\Lambda'(\omega) \simeq \frac{2M}{\pi} (P_n + Q_n)$$

$$\mathrm{Im}\,\Lambda(\omega) \simeq \frac{2M}{\pi} (R_n + S_n)$$

$$\mathrm{Im}\,\Lambda'(\omega) \simeq \frac{2M}{\pi} (R_n - S_n)$$

Le calcul des sauts (cf [13]) se fait selon les indications du paragraphe I-2 .


Initialisations
Choix du nombre n de termes
L(jkω) = U(kω) + jV(kω)
P1
Q1
R1
S1
k ← k + 2
l ← l + 1
non
l = n
oui
Re Λ(ω)
Re Λ'(ω)
Im Λ(ω)
Im Λ'(ω)
non
Sauts
oui
Calcul des sauts
Suite

- figure II-11

II - 3 - 4 Simulation de systèmes linéaires :

II - 3 - 4 - 1 Choix de la méthode d'intégration :

Parmi le grand nombre de méthodes d'intégration numérique des équations différentielles il est nécessaire d'en prendre une satisfaisant aux critères suivants :

- le démarrage de l'intégration doit pouvoir se faire avec conditions initiales et sans préalables particuliers , ce qui écarte à priori les méthodes à pas liés .
- le calcul doit permettre de disposer d'un indicateur de stabilité numérique de l'intégration .

La méthode de Runge-Kutta-Gilles satisfait à ces critères .

II - 3 - 4 - 2 Principe :

La méthode adoptée est la variante proposée par Gilles aux formules de Runge-Kutta [15] , [16] .

Soit à intégrer le système différentiel $Y' = F(x,Y)$ à partir du point (x_o, Y_o) pour x variant de x_o à $x_1 = x_o + h$ avec :

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Y' = F(x,Y) = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x,y_1) \\ f_2(x,y_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x,y_n) \end{bmatrix}$$

Gilles propose , en variante aux formules de Runge-Kutta :

$$Y_1 = Y_o + \frac{1}{6} \left(K_1 + (2 - \sqrt{2}) K_2 + (2 + \sqrt{2}) K_3 + K_4 \right)$$

avec :

$$K_1 = h.F (x_o , Y_o)$$

$$K_2 = h.F \left(x_o + \frac{h}{2} , Y_o + \frac{1}{2} K_1 \right)$$

$$K_3 = h.F \left(x_o + \frac{h}{2} , Y_o + \frac{\sqrt{2}-1}{2} K_1 + \frac{2-\sqrt{2}}{2} K_2 \right)$$

$$K_4 = h.F \left(x_o + h , Y_o - \frac{\sqrt{2}}{2} K_2 + \frac{2+\sqrt{2}}{2} K_3 \right)$$

l'erreur faite sur Y_1 est proportionnelle à :

$$h^5 . Y_\xi^{(5)} \qquad \text{avec} \qquad Y_\xi^{(5)} = \begin{bmatrix} y_1^{(5)} & (\xi_1) \\ y_2^{(5)} & (\xi_2) \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ y_n^{(5)} & (\xi_n) \end{bmatrix}$$

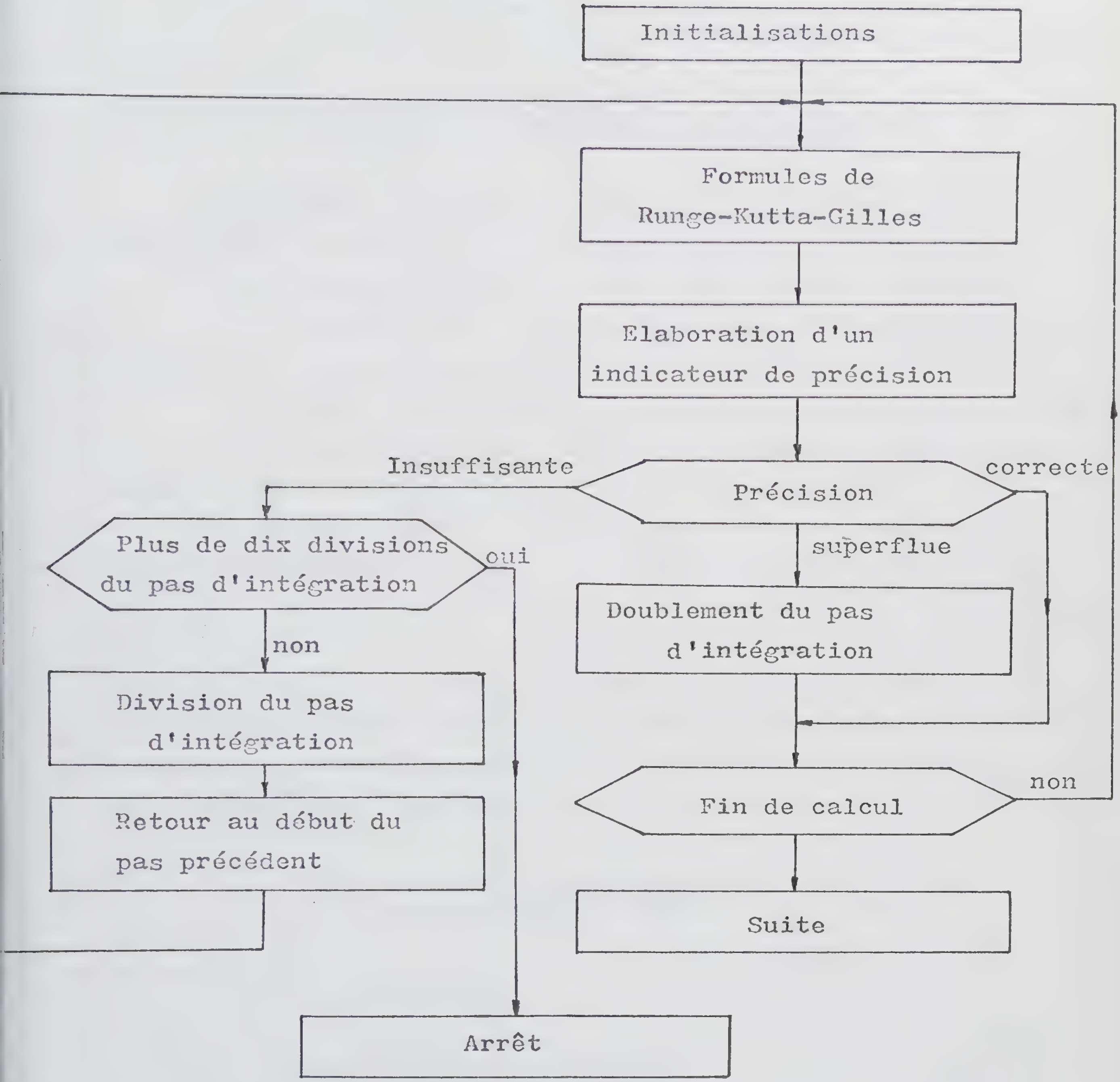
et $\xi_i \in \left[x_o , x_1 \right]$ pour $i = 1 , 2 , \ldots , n$.

Cette méthode est plus rapide et nécessite moins de place sur un calculateur numérique que la méthode initiale de Runge-Kutta [11] , [12] .

II - 3 - 4 - 3 <u>Organigramme</u> :

Le programme résultant , à partir d'un pas initial h donné , procède à l'intégration tout en générant un indicateur d'erreur : par comparaison à une valeur minimum de la précision choisie à l'avance , h est automatiquement augmenté ou diminué .

Les organigrammes d'application ont été donnés en : II-2-2 et II-2-3 .


Initialisations
Formules de Runge-Kutta-Gilles
Elaboration d'un indicateur de précision
Insuffisante
Précision
correcte
superflue
Plus de dix divisions du pas d'intégration
oui
non
Division du pas d'intégration
Retour au début du pas précédent
Doublement du pas d'intégration
Fin de calcul
non
Suite
Arrêt

- figure II-12 -

II - 4 ESSAIS

II - 4 - 1 Calculatrice numérique et programmes ;

L'essentiel du travail a été fait sur l'ordinateur IBM 1130 de l'ENSAM de Bordeaux-Talence .

Le programme principal a été scindé en trois parties :

- l'ensemble des ordres de lectures et d'initialisations préalables (sous-programme Lec)
- la méthode du simplexe (restant le programme principal)
- l'ensemble des tests de fin de calcul et ordres d'écritures (sous-programme Scrip)

Ce fractionnement , non nécessaire sur un ordinateur ayant une mémoire suffisante , a permis l'utilisation d'une machine de petite taille (mémoire de 8192 mots de 16 positions binaires et un disque magnétique) grâce à des techniques de recouvrements ; les sous-programmes d'entrées-sorties (Lec et Scrip) et de calcul du critère (Crit) sont prévus afin qu'ils puissent se recouvrir mutuellement en mémoire centrale lors de leurs exécutions respectives .

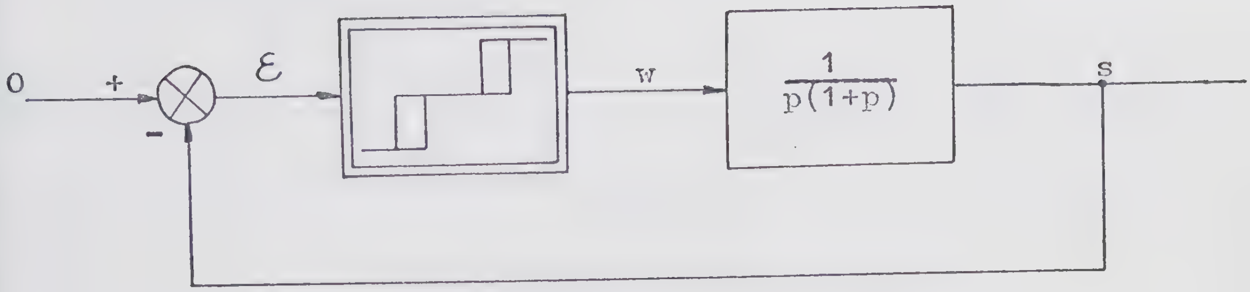
II - 4 - 2 Expériences et adaptations :

II - 4 - 2 - 1 Précision :

a) Méthode de Hamel-Cypkin :

Le traitement numérique déduit des méthodes de Hamel-Cypkin a donné , avec des temps de calcul relativement faibles , des résultats d'une précision très satisfaisante dans tous les nombreux cas d'essais effectués .

Exemple :



- figure II-13 -

La méthode de Hamel conduit à associer à L(p) :

$$\varepsilon\left(\frac{T}{2}\right) = -\rho\frac{T}{4} - \frac{e^{-\frac{T}{2}} - e^{-(1-\rho)\frac{T}{2}}}{e^{-\frac{T}{2}} + 1}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{e^{-\frac{T}{2}} - e^{-(1-\rho)\frac{T}{2}}}{e^{-\frac{T}{2}} + 1}$$

$$\varepsilon\left(\rho\frac{T}{2}\right) = -\rho\frac{T}{4} - \frac{e^{-\rho\frac{T}{2}} - 1}{e^{-\frac{T}{2}} + 1}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}\left(\rho\frac{T}{2}\right) = \frac{e^{-\rho\frac{T}{2}} - 1}{e^{-\frac{T}{2}} + 1}$$

équations qui permettent un calcul rigoureux des caractéristiques à la commutation d'un éventuel cycle limite .

Au hasard des essais , un échantillon assez représentatif de la précision obtenue a été fourni par la vérification suivante .

On a cherché si une oscillation pouvait exister avec les caractéristiques :

$$T = 5,9580$$
$$\rho = 0,002761$$

Résultats du calcul numérique :

- oscillation stable
- $\Delta = 0,0073959$
- $h = 0,0000305$

soit :

$$\mathcal{E}\left(\frac{T}{2}\right) = -\frac{\Delta+h}{2} = -0,0037132$$

$$\mathcal{E}\left(\rho\frac{T}{2}\right) = \frac{\Delta-h}{2} = 0,0036827$$

Résultats exacts obtenus à l'aide des formules de Hamel :

$$\mathcal{E}\left(\frac{T}{2}\right) = -0,0037133$$

$$\mathcal{E}\left(\rho\frac{T}{2}\right) = 0,0036829$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\mathcal{E}}{dt}\left(\frac{T}{2}\right) = -0,00039965 < 0 \\ \frac{d\mathcal{E}}{dt}\left(\rho\frac{T}{2}\right) = -0,00077959 < 0 \end{array}\right\} \quad \text{oscillation stable}$$

Ces valeurs ont été confirmées par simulation analogique aux incertitudes près (introduites par le calculateur) .

b) Simulation d'un demi-cycle limite :

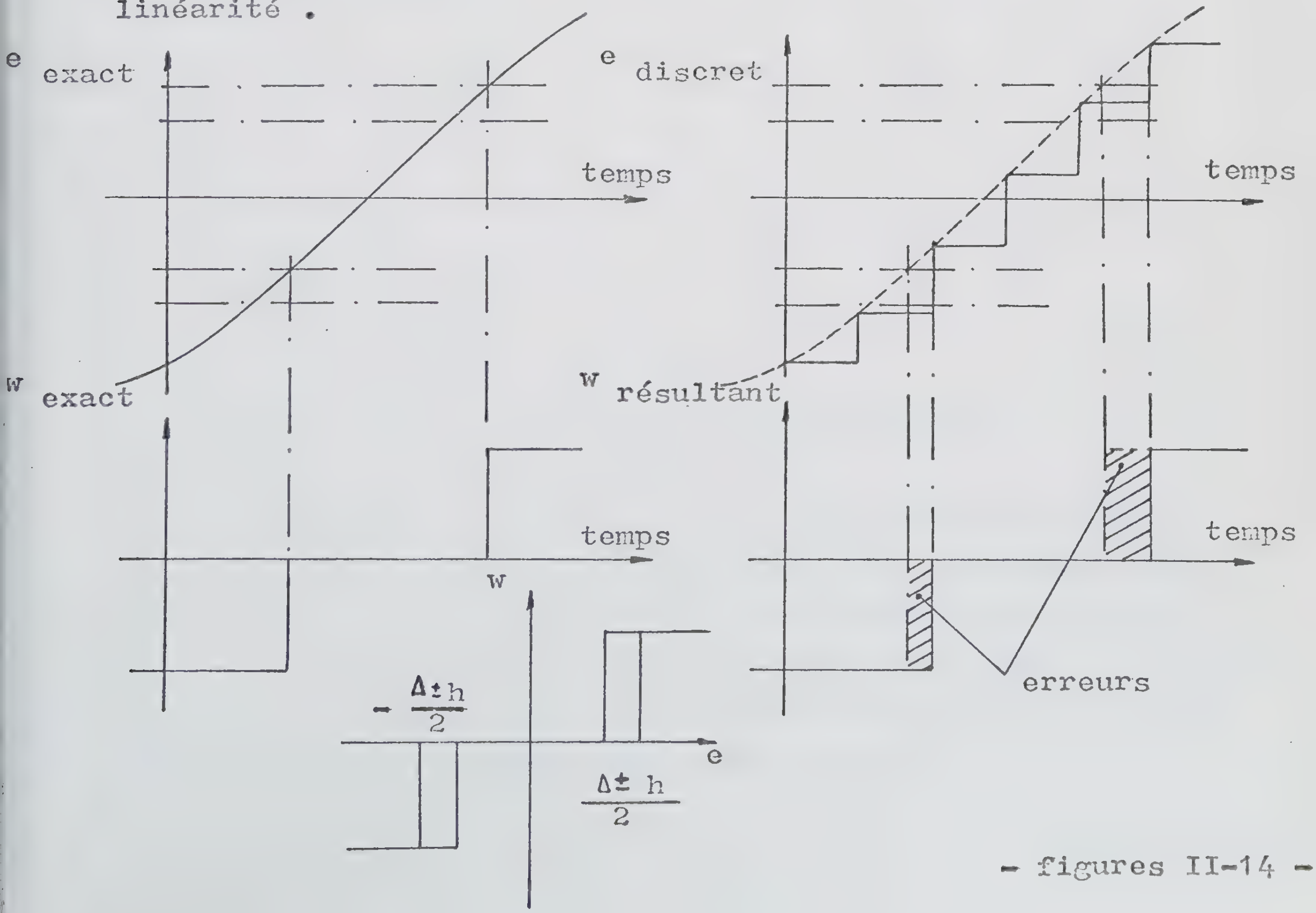
L'obtention de la valeur maximum de l'amplitude prise par la sortie du système a pu être effectuée avec une très bonne précision ; le temps de calcul dû à cette opération est assez notable ; pour le réduire à moins d'une dizaine de secondes , il a été nécessaire de prendre un pas d'intégration conduisant à une précision relative de l'ordre de 0,5 à 1% .

Les résultats sont restés compatibles avec les vérifications analogiques effectuées .

c) Simulation d'une réponse indicielle :

C'est cette dernière partie qui a opposé le plus de difficultés .

Pour que les informations souhaitées (cf paragraphe II-1-3-2) aient une précision homogène avec celles déjà obtenues la simulation numérique nécessite un pas d'intégration très faible et des temps de calcul très importants (plusieurs minutes La principale source d'erreur vient de la simulation de la non linéarité .



- figures II-14 -

Un pas d'intégration donnant des temps de calcul acceptables (une trentaine de secondes) ne conduit à connaître le " temps de pic " t_1 (cf figure II-2) qu'à 10 % près ; la valeur alors trouvée pour ce pic est très mauvaise , elle ne peut être considérée que comme une indication qualitative .

Ces différentes opérations s'intègrant dans un calcul itératif d'optimisation , il était impératif de rechercher des temps de calcul faibles ; mais , puisque certains résultats perdaient alors leur sens il a fallu procéder à des transformations dans l'élaboration du critère .

II - 4 - 2 - 2 Modifications :

On disposait donc d'informations précises données par les méthodes de Hamel-Cypkin et d'indications approchées fournies par l'étude d'une réponse indicielle . Il convenait donc de les traiter de façon différente et , pour cela , il a été établi une hiérarchie des contraintes .

Cinq contraintes ont été considérées comme majeures :

$$\left.\begin{array}{l}\omega > 0 \\ 0 < \rho \leqslant 1\end{array}\right\} \quad \text{sens physique}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Re}\,\Lambda\left(\frac{T}{2}\right) < 0 \\ \mathrm{Re}\,\Lambda'\left(\frac{T}{2}\right) < 0\end{array}\right\} \quad \text{oscillation stable}$$

$$\sup \left| \text{sortie} \right| \leqslant 0{,}005 \quad \text{imposé à priori}$$

Ces conditions sont en effet fondamentales et elles peuvent être vérifiées avec précision ; ces paramètres sont donc traités ainsi qu'il a été prévu (paragraphe II-3-2-2) .

Si les contraintes majeures ne sont pas toutes satisfaites , la simulation de la réponse indicielle n'est pas faite et le critère subit une pénalisation supplémentaire .

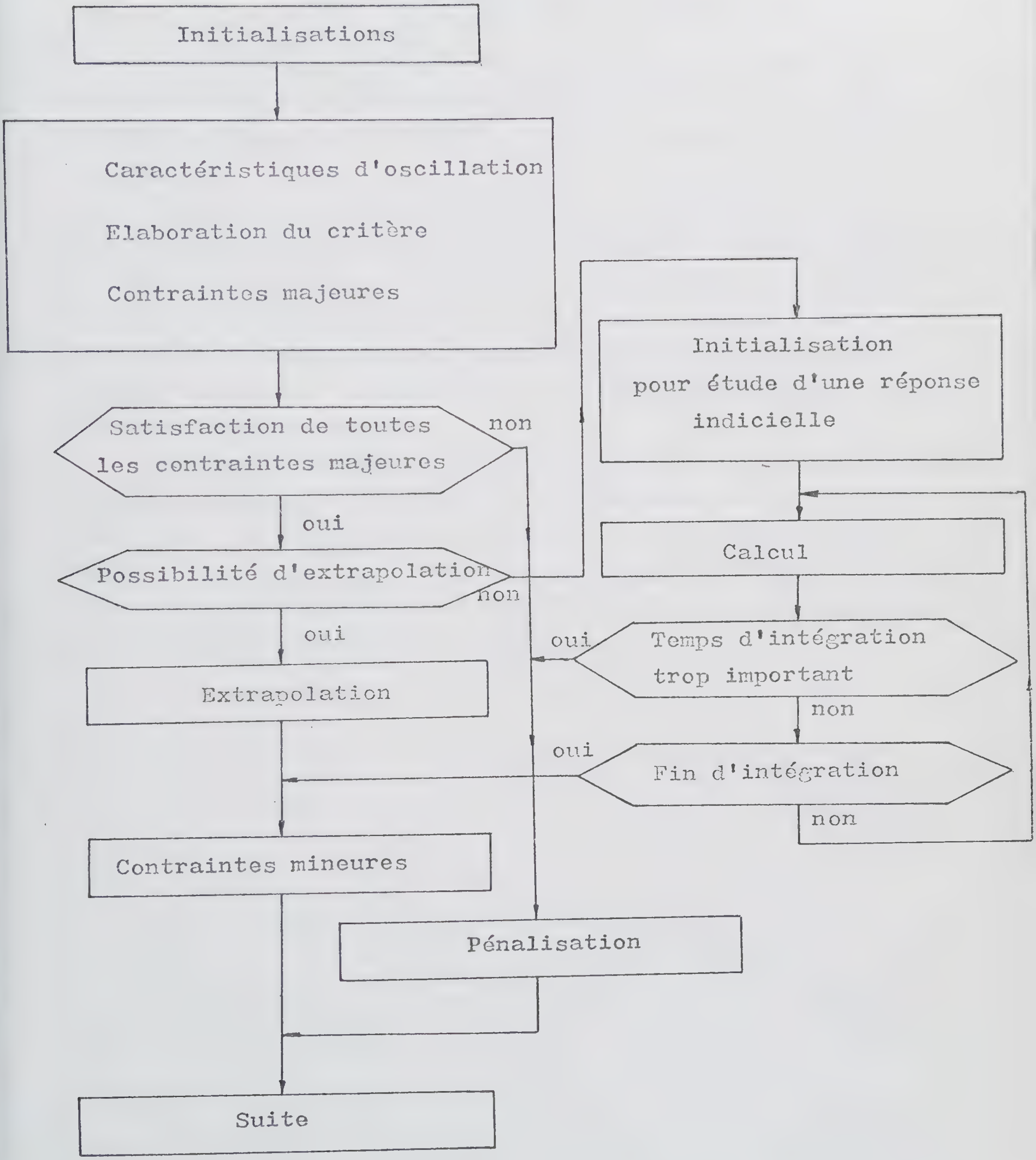
Dans le cas contraire on effectue la simulation avec un pas d'intégration faible mais les résultats ne sont exploités dans l'élaboration du critère qu'avec un poids beaucoup plus petit que celui affecté aux contraintes majeures .

Contraintes mineures :

- premier dépassement $< 0,005$ de l'échelon d'entrée
- deuxième dépassement $<$ premier dépassement (amortissement)

Enfin , lorsque l'on évalue les critères associés à des points très proches (fin de calcul) , la simulation de la réponse indicielle devient inutile car elle reste alors identique à elle même : la diminution du pas d'intégration n'entraîne plus d'amélioration tout en risquant de rendre le bruit de calcul prépondérant . Il est donc alors , dans ce cas aussi , inutile d'effectuer cette opération : il suffit de se contenter d'extrapoler aux nouveaux points les résultats acquis pour des points voisins . Cette opération est extrêmement rapide et permet encore de gagner du temps de calcul .

L'organigramme suivant (figure II-15) résume les adaptations apportées au schéma de calcul initial (figure II-10) .


Initialisations
Caractéristiques d'oscillation
Elaboration du critère
Contraintes majeures
Satisfaction de toutes les contraintes majeures
non
oui
Possibilité d'extrapolation
non
oui
Extrapolation
Initialisation pour étude d'une réponse indicielle
Calcul
Temps d'intégration trop important
oui
non
Fin d'intégration
oui
non
Contraintes mineures
Pénalisation
Suite

- figure II-15 -

II - 4 - 2 - 3 Temps de calcul et convergence :

Cet ensemble d'adaptations a permis de réduire considérablement les temps de calcul (75 % environ) qui restent tout de même notables du fait de la faible puissance de l'ordinateur utilisé .

En moyenne , pour l'ensemble des exemples mis à l'essai , une itération (calcul du critère associé à un point donné par la méthode du simplexe) est effectuée en 30 à 60 secondes . La convergence de la méthode du simplexe a exigé de 50 à 150 itérations suivant que les points de départ fournis étaient " bons " ou non . Un essai complet a donc nécessité de 1 H 30 à 2 H de temps de calcul .

Il est à remarquer que la méthode du simplexe n'a pratiquement pas posé de problème de convergence dans la plupart des cas . Pour un même exemple mais avec des points de départ différents , les solutions obtenues ont été généralement très proches : rarement la recherche s'est stabilisée dans un minimum relatif ou , exceptionnellement , n'a pas abouti .

III - APPLICATION .

III - 0 INTRODUCTION .

On se propose d'appliquer les méthodes élaborées à la régulation de la puissance d'un réacteur nucléaire .

Les modèles mathématiques adoptés ont été pris relativement simples afin de ne pas trop alourdir les vérifications . Bien entendu , dans la mesure où l'efficacité de la méthode sera mise en évidence , il n'y aura pas de difficultés supplémentaires à adopter des modèles plus élaborés .

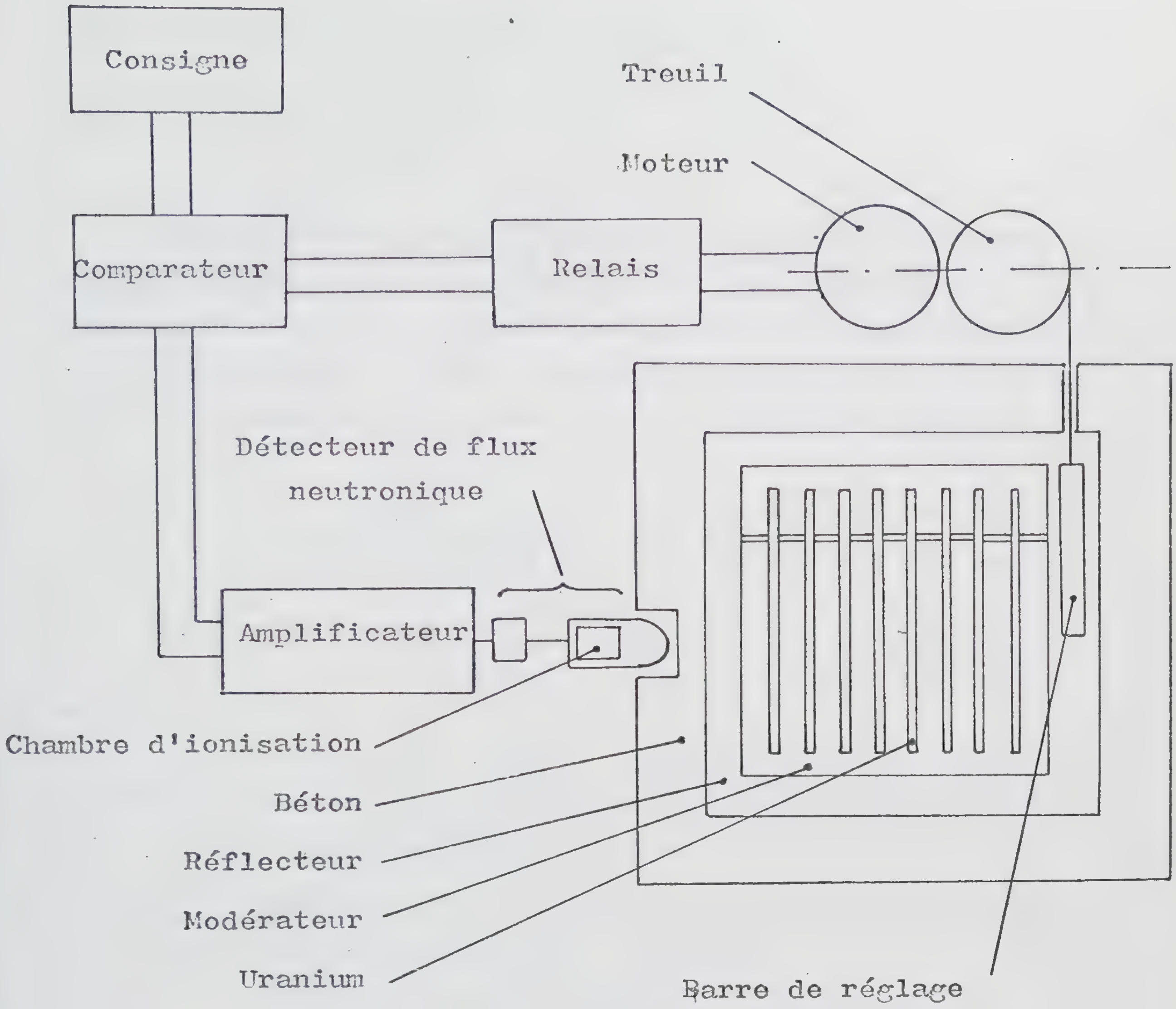
III - 1 LE REACTEUR NUCLEAIRE .

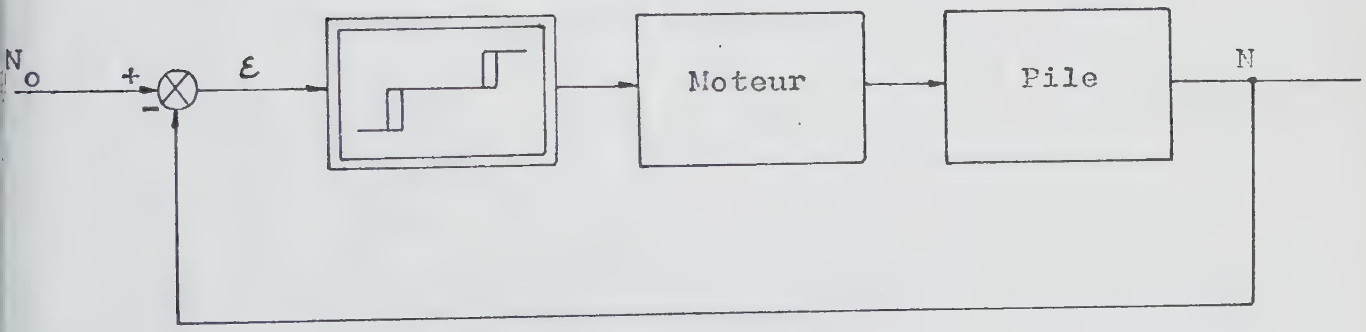
III - 1 - 1 Description sommaire :

La puissance du réacteur est déterminée par la position de barres de contrôle déplacées par l'intermédiaire d'un moteur .

Cette puissance est mesurée à l'aide d'un détecteur de flux neutronique dont le signal est amplifié .

Le signal d'erreur élaboré commande le relais d'alimentation du moteur .


Consigne
Treuil
Moteur
Comparateur
Relais
Détecteur de flux neutronique
Amplificateur
Chambre d'ionisation
Béton
Réflecteur
Modérateur
Uranium
Barre de réglage


N_o
+
-
ε
Moteur
Pile
N

- figure III-1 -

III - 1 - 2 Modèles mathématiques :

III - 1 - 2 - 1 La pile :

D'après [7] , pour un réacteur de faible puissance et en négligeant les effets thermiques et d'empoisonnement (Xénon et Samarium) , on peut obtenir une fonction de transfert simplifiée si l'on considère un seul groupe de neutrons retardés ayant un rôle équivalent à celui joué par l'ensemble des groupes .

$$\frac{\delta n}{\delta k} = \frac{n_o}{\theta} \frac{p+\lambda}{p(p+\lambda+\frac{\beta}{\theta})}$$

avec :

- n_o nombre moyen de neutrons par unité de volume .
- δn nombre instantané de neutrons par unité de volume (valeur asservie) .
- δk réactivité du réacteur (grandeur de commande) .
- β fraction de neutrons retardés .
- θ vie moyenne des neutrons prompts .
- λ constante radioactive des précurseurs de neutrons retardés .

à titre d'exemple , pour un réacteur à ^{235}U

$\theta = 10^{-4}$ s

$\beta = 64.10^{-4}$

$\lambda = 0,07\ s^{-1}$

d'où :

$$\frac{\delta n}{\delta k} = n_o \frac{0,259 + 3,98\ p}{p(1 + 0,0154\ p)}$$

III - 1 - 2 - 2 Le moteur et les barres de contrôle :

Autour du point de fonctionnement on admet que pour de petits déplacements il existe une relation linéaire entre la position des barres et la réactivité . La fonction de transfert associée à l'ensemble moteur-barres peut s'écrire :

$$\frac{\delta k}{u} = \frac{Km}{p(1+\tau p)}$$

u tension appliquée au moteur

k réactivité résultante

τ constante de temps du moteur

III - 1 - 2 - 3 Détecteurs et appareils de mesure :

Ces organes sont considérés comme linéaires (pas d'approximation notable) ; leur bande passante est suffisamment large devant celle du moteur et de la pile pour être considérée comme infinie .

III-2-MISE EN OEUVRE .

III - 2 - 1 Choix du type de pile :

Des recherches analogues à cette étude ont été effectuées par J . Ménézès et P . Jover [7] . Le système étudié était une pile expérimentale à haut flux (type OSIRIS) utilisant de l'eau légère et de l'uranium enrichi .

La recherche de la minimisation de la pulsation de l'auto-oscillation a été faite par étude directe sur calculateur analogique .

Il paraissait donc intéressant de choisir le même modèle afin de pouvoir comparer les résultats d'une recherche expérimentale aux résultats donnés automatiquement par le programme , aboutissement de l'étude qui vient d'être faite .

III - 2 - 2 Paramètres :

Les approximations faites par [7] sont celles citées paragraphe III-1-2-1-

L'ensemble moteur - barres de contrôle - pile est considéré comme représenté par la fonction de transfert :

$$G = \frac{0,25+3,25p}{p^2(1+0,3p)(1+0,006p)}$$

III - 2 - 3 Résultats :

III - 2 - 3 - 1 Configurations choisies :

Il a été effectué une série d'essais pour différents cas .

On a d'abord recherché les meilleures valeurs du seuil et de l'hystérésis pour le système non corrigé .

Ensuite l'effet de correcteurs placés en chaîne directe ou en réaction a été étudié . On s'est limité à des filtres du deuxième ordre ; il n'a pas paru utile d'essayer d'en rechercher d'un ordre plus élevé (bien que cela ne présente pas de difficultés) car des correcteurs d'un ordre trop grand n'auraient plus eu de sens devant les modèles simplifiés utilisés .

III - 2 - 3 - 2 <u>Valeurs numériques</u> :

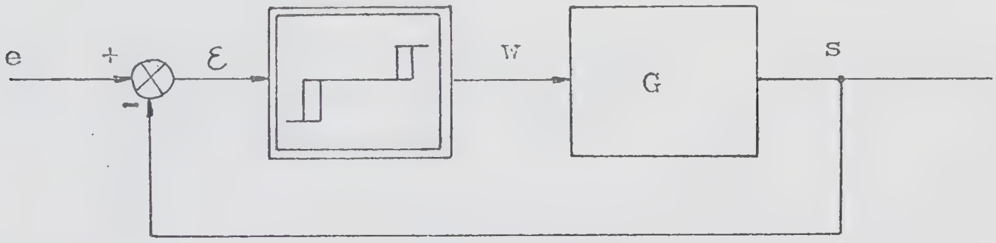
Unités :

T en secondes

ρ sans dimension

Δ, h, sup|sortie| } en % de la valeur de consigne

a) Système non corrigé



T = 1,81 s = 0,998 %

ρ = 0,00370 h = 0,001 % ≃ 0

sup|sortie| = 0,500 %

b) Correcteurs du premier ordre :

- en chaîne directe

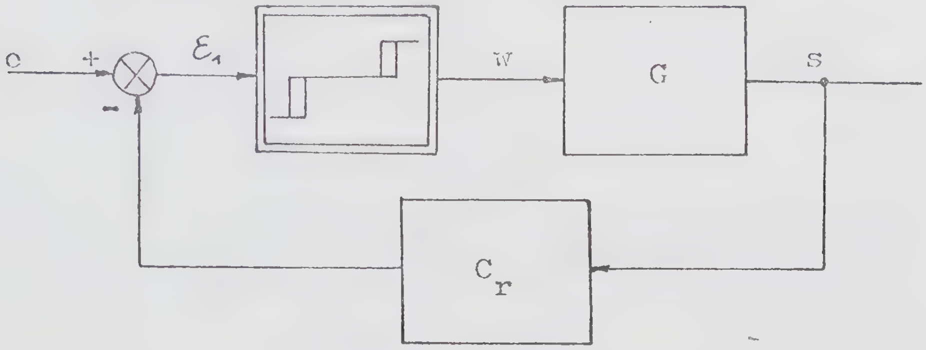
$T = 8{,}40$ s $\Delta = 0{,}840$ %

$\rho = 0{,}00588$ $h = 0{,}00003$ % $\simeq 0$

$C_d = \frac{1+0{,}0142p}{1+0{,}609p}$ sup|sortie| = 0,435 %

(Correcteur de type intégral)

- en réaction



$T = 8{,}35$ s $\Delta = 0{,}838$ %

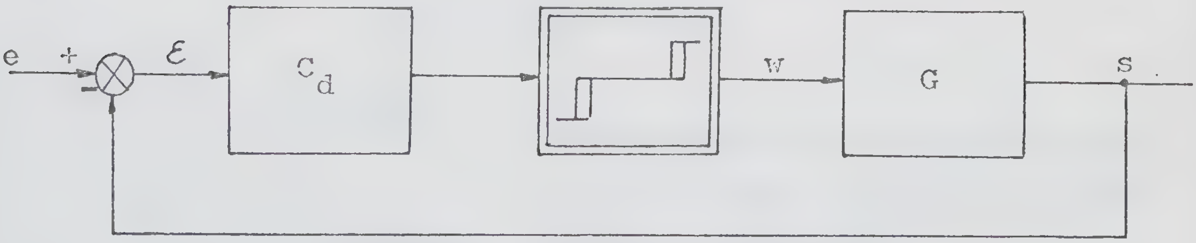
$\rho = 0{,}0060$ $h = 0{,}00005$ % $\simeq 0$

$C_r = \frac{1+0{,}0139p}{1+0{,}605p}$ sup|sortie| = 0,43 %

(correcteur de type intégral)

c) Correcteurs du deuxième ordre :

- en chaîne directe



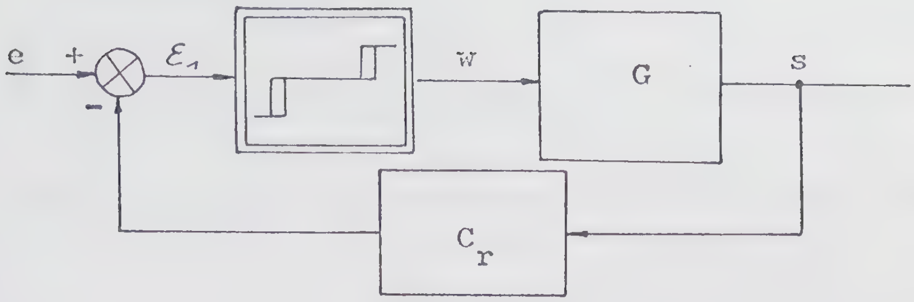
$T = 10{,}7$ $\Delta = 0{,}65$%

$\rho = 0{,}00052$ $h = 0$

sup|sortie| = 0,38 %

$C_d = \frac{1+0{,}744p+0{,}0208p^2}{1+1{,}41p+0{,}63p^2}$ (non décomposable)

- en réaction



$T = 12,2$ $\Delta = 0,249\ \%$

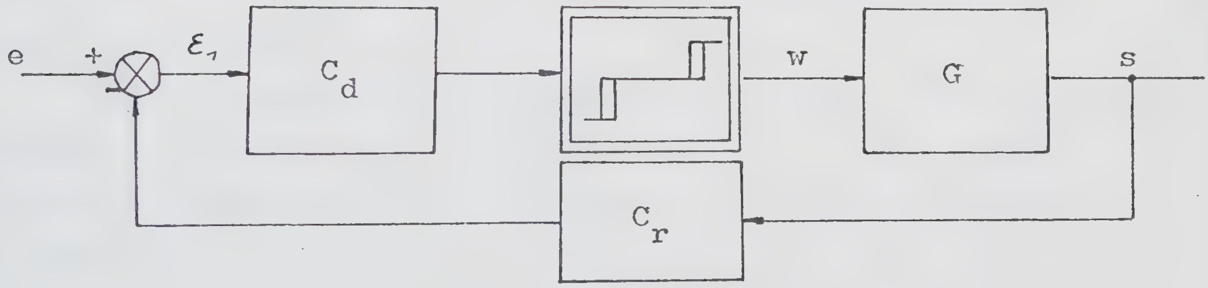
$\rho = 0,00053$ $h = 0$

$\sup |\text{sortie}| = 0,24\ \%$

$$C_r = \frac{1+1,08p+0,041p^2}{1+3,28p+0,48p^2} = \frac{(1+0,0199p)(1+2,05p)}{(1+0,152\ p)(1+3,90p)}$$

(produit de deux correctèurs du type inté-gral

- mixte (2 correcteurs du premier ordre)



$T = 12,9$ $\Delta = 0,27\ \%$

$\rho = 0,00060$ $h = 0$

$\sup |\text{sortie}| = 0,31\ \%$

$$C_r = \frac{1+1,96p}{1+5,71p}$$

(à rapprocher de la décomposition du correcteur du deuxième ordre placé en réaction)

$$C_d = \frac{1+0,021p}{1+0,151p}$$

Remarques :

- les correcteurs sont du type intégral .
- l'hystérésis est toujours sensiblement nulle .

III - 2 - 3 - 3 Examen des résultats :

Plusieurs remarques peuvent être faites immédiatement .

Tout d'abord on peut constater que , pour un même type de correcteur , la solution finale est en général peu (ou même très peu) affectée par la place donnée au filtre .
Ce résultat s'explique facilement : pour le calcul des caractéristiques du régime permanent la consigne est considérée comme nulle et la place du correcteur n'a alors pas d'importance ; pour l'étude d'une réponse indicielle , par contre , la position du correcteur a une influence mais la méthode de calcul adoptée ne lui donne que peu d'influence sur le résultat final .

Ensuite on peut voir que la période augmente de façon sensible au fur et à mesure de la complication des correcteurs , ce qui est l'effet recherché .

Une première série d'essais avait conduit à des résultats analogues mais avec des valeurs de ρ, Δ et h très faibles (ordre de grandeur 10^{-6}) . Le système n'était donc plus commandé par des créneaux mais par des impulsions très courtes dont la réalisation technologique pouvait être difficile .
La méthode permettant sans difficulté de modifier les contraintes des essais ont été effectués avec la plage de variation de réduite arbitrairement de $]0 ; 1]$ à $]0,0005 ; 1]$. La période T a été peu affectée par cette légère restriction ; par contre Δ et h sont alors restés notables . On pourrait donc , à ce niveau , envisager l'introduction de contraintes technologiques sur les caractéristiques de la non linéarité , ce que le programme permet très simplement .

Il était à craindre qu'un changement - même faible - dans les valeurs des paramètres n'entraîne des écarts importants par rapport aux caractéristiques prévues : les nombreux essais qui ont été faits n'ont pas montré de résultats de ce genre .

Enfin un rapprochement des résultats de [7] avec ceux donnés plus haut permet de constater que , pour un même cas (système non corrigé) , la période d'intervention du relais passe de 1 seconde [7] à 1,81 seconde (cf page 70) .

Il est à noter que [7] s'est limité à l'étude du système non corrigé car , au-delà , la méthode utilisée (recherche expérimentale par tâtonnements sur un calculateur analogique) est difficilement exploitable pour un nombre de paramètres supérieur à trois ou quatre .

IV - CONCLUSIONS

Nous sommes donc parvenus au but essentiel fixé au départ c'est à dire l'élaboration et la mise en oeuvre d'une méthode de minimisation de la pulsation d'auto-oscillation d'un système linéaire commandé par un " plus-ou-moins " .

Au cours de l'étude nous avons établi une méthode de construction rapide des lieux de Hamel ; le recueil d'équations et de graphes placés en annexe en est l'aboutissement .

Nous avons aussi déterminé un moyen d'utilisation des méthodes de Hamel-Cypkin pour la mise directe d'un système en conditions initiales sur son éventuel cycle limite .

La programmation qui en a résulté s'est heurtée à un problème de simulation à priori d'apparence mineure . Les solutions proposées pour lever cette difficulté n'ont donné en définitive , ainsi qu'on l'a vu dans l'application , que partiellement satisfaction .

Cette étude constitue donc un certain état d'avancement d'un travail dont deux types de prolongement peuvent être envisagés : un concernant cette étude en général et un autre l'application en particulier .

Tout d'abord , d'une façon générale , il s'impose d'essayer d'améliorer l'étude des performances dynamiques (réponse indicielle) ; à cette occasion on peut rappeler qu'un calculateur hybride aurait été l'outil le mieux adapté à ce travail : il est sûr en effet qu'une simulation analogique n'aurait pas entraîné de problème de discrétisation ; cependant l'analyse numérique , combinée aux propriétésdes systèmes linéaires , offre un très large éventail de possibilités qui sont loin d'avoir pu être toutes envisagées .

Ensuite on peut penser à une extension au cas où , des échantillonneurs apparaissant dans la boucle d'asservissement , des correcteurs numériques sont à rechercher : ce prolongement peut conduire à l'étude de l'introduction d'un calculateur dans la chaîne de pilotage .

Dans le cadre de l'application , de nombreuses directions de recherche sont à prendre .

L'étude est à compléter en tenant compte des effets thermiques et d'empoisonnement ; dans la mesure où l'on peut disposer de différents moteurs de commande de barres , il faut déterminer celui dont la constante de temps est la plus favorable au but cherché : ceci peut se faire immédiatement et sans modifications de nos programmes car le cas d'une fonction de transfert modifiable a été prévu dans la programmation .

Dans la mesure où un calculateur numérique apparaîtrait dans la chaîne , il serait intéressant de prendre en compte , en temps réel si possible , les transformations des éléments au cours du temps (effets thermiques et d'empoisonnement mais aussi évolution de tous les éléments par vieillissement et et modification de la fonction de transfert de la pile par changement de la puissance de consigne) .

- ANNEXE -

Sommaire :

		page
I	Recueil d'équations de lieux de Hamel .	1
II	Tracés de lieux de Hamel .	24
III	Listings .	33

- I - RECUEIL D'EQUATIONS DE LIEUX DE HAMEL .

I - 1 - SYSTEMES DU PREMIER ORDRE .

$L(p) = \frac{1}{p}$	$\mathcal{E} = -\frac{T}{4}$ $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -1$
$L(p) = \frac{1}{1+ap}$	$\mathcal{E} = -\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a}$ $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a}$

I - 2 - SYSTEMES DU DEUXIEME ORDRE .

$L(p) = \frac{1}{p^2}$	$\varepsilon = 0$ $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{T}{4}$
$L(p) = \frac{1+ap}{p^2}$	$\varepsilon = -a\frac{T}{4}$ $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{T}{4} - a$
$L(p) = \frac{1}{p(1+ap)}$	$\varepsilon = -\frac{T}{4} + a\ \mathrm{th}\ \frac{T}{4a}$ $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\mathrm{th}\ \frac{T}{4a}$
$L(p) = \frac{1+bp}{p(1+ap)}$	$\varepsilon = -\frac{T}{4} - (b-a)\mathrm{th}\ \frac{T}{4a}$ $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{b}{a} + \frac{b-a}{a}\ \mathrm{th}\ \frac{T}{4a}$
$L(p) = \frac{1}{(1+bp)(1+ap)}$	$\varepsilon = \frac{1}{b-a}(a\ \mathrm{th}\ \frac{T}{4a} - b\mathrm{th}\ \frac{T}{4b})$ $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{b-a}(\mathrm{th}\ \frac{T}{4b} - \mathrm{th}\ \frac{T}{4a})$
$L(p) = \frac{p}{(1+bp)(1+ap)}$	$\varepsilon = \frac{1}{b-a}(\mathrm{th}\ \frac{T}{4b} - \mathrm{th}\ \frac{T}{4a})$ $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{ab} + \frac{1}{b-a}(\frac{1}{a}\ \mathrm{th}\ \frac{T}{4a} - \frac{1}{b}\mathrm{th}\ \frac{T}{4b})$

$L(p) = \frac{1+bp}{(1+p)(1+ap)}$	$\mathcal{E} = -\frac{1-b}{1-a}\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4} + \frac{a-b}{1-a}\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a}$ $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{b}{a} + \frac{1-b}{1-a}\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4} - \frac{a-b}{a(1-a)}\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a}$
$L(p) = \frac{1}{p^2+2ap+1} \qquad (a^2-1<0)$	avec
$\mathcal{E} = -A + \sqrt{\frac{a^2}{1-a^2}}\,B$ $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{B}{\sqrt{1-a^2}}$	$u = \mathrm{th}\,\frac{aT}{4}$ $v = \mathrm{tg}\,\frac{T\sqrt{1-a^2}}{4}$
$L(p) = \frac{p}{p^2+2ap+1} \qquad (a^2-1<0)$	$A = \frac{u(1+v^2)}{1+u^2v^2}$
$\mathcal{E} = -\frac{B}{\sqrt{1-a^2}}$ $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -1 + A + \sqrt{\frac{a^2}{1-a^2}}\,B$	$B = \frac{v(1-u^2)}{1+u^2v^2}$
$L(p) = \frac{1}{(1+ap)^2}$	$\mathcal{E} = -\mathrm{th}\,\frac{T}{4a} + \frac{T}{4a}\left(1 - \mathrm{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)$ $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{T}{4a^2}\left(1-\mathrm{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)$
$L(p) = \frac{p}{(1+ap)^2}$	$\mathcal{E} = -\frac{T}{4a^2}\left(1-\mathrm{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)$ $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{1}{a^2}\left(1-\mathrm{th}\,\frac{T}{4a}\right) + \frac{T}{4a^3}\left(1-\mathrm{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)$

$$L(p) = \frac{1+bp}{(1+ap)^2}$$

$$\varepsilon = - \operatorname{th} \frac{T}{4a} + \frac{T}{4} \frac{a-b}{a^2} \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = - \frac{b}{a^2} \left(1 - \operatorname{th} \frac{T}{4a}\right) - \frac{T}{4} \frac{a-b}{a^3} \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{T}{4a}\right)$$

I - 3 - SYSTEMES DU TROISIEME ORDRE .

$L(p) = \frac{1}{p^3}$	$\varepsilon = \frac{T^3}{192}$ $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$
$L(p) = \frac{1+ap}{p^3}$	$\varepsilon = \frac{T^3}{192}$ $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{aT}{4}$
$L(p) = \frac{(1+bp)(1+ap)}{p^3}$	$\varepsilon = -\frac{abT}{4} + \frac{T^3}{192}$ $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{T}{4}(b+a) - ab$
$L(p) = \frac{p^2+2ap+1}{p^3}$	$\varepsilon = -\frac{T}{4} + \frac{T^3}{192}$ $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{aT}{2} - 1$
$L(p) = \frac{1}{p^2(1+ap)}$	$\varepsilon = \frac{aT}{4} - a^2 \text{ th } \frac{T}{4a}$ $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{T}{4} + a \text{ th } \frac{T}{4a}$
$L(p) = \frac{1+bp}{p^2(1+ap)}$	$\varepsilon = (a-b)\frac{T}{4} + a(b-a) \text{ th } \frac{T}{4a}$ $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{T}{4} + (a-b) \text{ th } \frac{T}{4a}$

$$L(p) = \frac{1}{p(1+ap)(1+bp)}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{T}{4} + \frac{1}{a-b}\left(a^2 \,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a} - b^2 \,\mathrm{th}\,\frac{T}{4b}\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{a-b}\left(b \,\mathrm{th}\,\frac{T}{4b} - a \,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{1+cp}{p(1+ap)(1+bp)}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{T}{4} + \frac{a^2(a-c)}{a-b}\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a} + \frac{b^2(b-c)}{b-a}\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4b}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{a(a-c)}{a-b}\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a} + \frac{b(b-c)}{b-a}\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4b}$$

$$L(p) = \frac{1}{p(1+ap)^2}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{T}{4}\left(2-\mathrm{th}^2\,\frac{T}{4a}\right) + 2a\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a} + \frac{1}{a}\,\frac{T}{4}\left(1 - \mathrm{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{1+bp}{p(1+ap)^2}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{T}{4} + (2a-b)\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a} + \frac{b-a}{a}\,\frac{T}{4}\left(1-\mathrm{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a} + \frac{a-b}{a^2}\,\frac{T}{4}\left(1-\mathrm{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{p^2+2ap+1}{p(1+p)^2}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{T}{4} + 2(1-a)\left(\mathrm{th}\,\frac{T}{4} - \frac{T}{4}\left(1-\mathrm{th}^2\,\frac{T}{4}\right)\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -1 + 2(1-a)\,\frac{T}{4}\left(1-\mathrm{th}^2\,\frac{T}{4}\right)$$

$$L(p) = \frac{(1+bp)^2}{p(1+ap)^2}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{T}{4} + 2(a-b)\ \mathrm{th}\frac{T}{4a} - \frac{(b-a)^2}{a^2}\frac{T}{4}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2-a^2}{a^2}\ \mathrm{th}\frac{T}{4a} + \frac{(b-a)^2}{a^3}\frac{T}{4}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{1}{(1+ap)(1+bp)(1+cp)}$$

$$\mathcal{E} = \frac{a^2}{(a-b)(c-a)}\ \mathrm{th}\frac{T}{4a} + \frac{b^2}{(b-c)(a-b)}\ \mathrm{th}\frac{T}{4b} + \frac{c^2}{(c-a)(b-c)}\ \mathrm{th}\frac{T}{4c}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{a}{(a-b)(a-c)}\ \mathrm{th}\frac{T}{4a} + \frac{b}{(b-c)(b-a)}\ \mathrm{th}\frac{T}{4b} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}\ \mathrm{th}\frac{T}{4c}$$

$$L(p) = \frac{1+dp}{(1+ap)(1+bp)(1+cp)}$$

$$\mathcal{E} = \frac{a(a-d)}{(a-b)(c-a)}\ \mathrm{th}\frac{T}{4a} + \frac{b(b-d)}{(b-c)(a-b)}\ \mathrm{th}\frac{T}{4b} + \frac{c(c-d)}{(c-a)(b-c)}\ \mathrm{th}\frac{T}{4c}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{a-d}{(a-b)(a-c)}\ \mathrm{th}\frac{T}{4a} + \frac{b-d}{(b-c)(b-a)}\ \mathrm{th}\frac{T}{4b} + \frac{c-d}{(c-a)(c-b)}\ \mathrm{th}\frac{T}{4c}$$

$$L(p) = \frac{1}{(1+ap)^2(1+bp)}$$

$$\mathcal{E} = \frac{a(2b-a)}{(a-b)^2}\ \mathrm{th}\frac{T}{4a} - \frac{b^2}{(a-b)^2}\ \mathrm{th}\frac{T}{4b} + \frac{1}{a-b}\frac{T}{4}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{b}{(a-b)^2}\left(\mathrm{th}\frac{T}{4b} - \mathrm{th}\frac{T}{4a}\right) + \frac{1}{a(b-a)}\frac{T}{4}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{p}{(1+ap)^2(1+bp)}$$

$$\mathcal{E} = \frac{b}{(a-b)^2}\left(\text{th}\,\frac{T}{4b} - \text{th}\,\frac{T}{4a}\right) + \frac{1}{a(b-a)}\,\frac{T}{4}\left(1 - \text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\text{th}\,\frac{T}{4a} - \text{th}\,\frac{T}{4b}\right) + \frac{1}{a^2(a-b)}\,\frac{T}{4}\left(1 - \text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{1+cp}{(1+ap)^2(1+bp)}$$

$$\mathcal{E} = \frac{2ab-bc-a^2}{(a-b)^2}\,\text{th}\,\frac{T}{4a} - \frac{b(b-c)}{(a-b)^2}\,\text{th}\,\frac{T}{4b} + \frac{a-c}{a(a-b)}\,\frac{T}{4}\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{b-c}{(a-b)^2}\left(\text{th}\,\frac{T}{4b} - \text{th}\,\frac{T}{4a}\right) + \frac{c-a}{a^2(a-b)}\,\frac{T}{4}\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{p^2}{(1+ap)^2(1+bp)}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\text{th}\,\frac{T}{4a} - \text{th}\,\frac{T}{4b}\right) + \frac{1}{a^2(a-b)}\,\frac{T}{4}\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{a^2b} + \frac{b-2a}{a^2(a-b)^2}\,\text{th}\,\frac{T}{4a} + \frac{1}{b(a-b)^2}\,\text{th}\,\frac{T}{4b} + \frac{1}{a^3(b-a)}\,\frac{T}{4}\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{1}{(1+ap)^3}$$

$$\mathcal{E} = \frac{T}{4a}\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)\left(1+\frac{T}{4a}\,\text{th}\,\frac{T}{4a}\right) - \text{th}\,\frac{T}{4a}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{T^2}{16a^3}\,\text{th}\,\frac{T}{4a}\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{p}{(1+ap)^3}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{T^2}{16a^3}\,\text{th}\,\frac{T}{4a}\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{T}{4a^3}\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)\left(1-\frac{T}{4a}\,\text{th}\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{1+bp}{(1+ap)^3}$$

$$\mathcal{E} = \frac{T}{4a^2}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)\left(a+\frac{a-b}{a}\,\frac{T}{4}\,\mathrm{th}\frac{T}{4a}\right) - \mathrm{th}\frac{T}{4a}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{T}{4a^3}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)\left(b+\frac{a-b}{a}\,\frac{T}{4}\,\mathrm{th}\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{p^2}{(1+ap)^3}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{T}{4a^3}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)\left(1-\frac{T}{4a}\,\mathrm{th}\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{1}{a^3}\left(1-\mathrm{th}\frac{T}{4a}\right) + \frac{T}{4a^4}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)\left(2-\frac{T}{4a}\,\mathrm{th}\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{p(1+bp)}{(1+ap)^3}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{T}{4a^3}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)\left(b+\frac{a-b}{a}\,\frac{T}{4}\,\mathrm{th}\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{b}{a^3}\left(1-\mathrm{th}\frac{T}{4a}\right) + \frac{T}{4a^4}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)\left(2b+\frac{a-b}{a}\,\frac{T}{4}\,\mathrm{th}\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{(1+bp)^2}{(1+ap)^3}$$

$$\mathcal{E} = -\mathrm{th}\frac{T}{4a} + (a-b)\frac{T}{4a^3}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)\left(a+b+\frac{a-b}{a}\,\frac{T}{4}\,\mathrm{th}\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{b^2}{a^3}\left(1-\mathrm{th}\frac{T}{4a}\right) + (b-a)\frac{T}{4a^4}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)\left(2b+\frac{a-b}{a}\,\frac{T}{4}\,\mathrm{th}\frac{T}{4a}\right)$$

I - 4 - SYSTEMES DU QUATRIEME ORDRE .

$L(p) = \frac{1}{p^4}$	$\varepsilon = 0$ $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{T^3}{192}$
$L(p) = \frac{1+ap}{p^4}$	$\varepsilon = \frac{aT^3}{192}$ $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{T^3}{192}$
$L(p) = \frac{(1+bp)(1+ap)}{p^4}$	$\varepsilon = (b+a)\frac{T^3}{192}$ $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{abT}{4} + \frac{T^3}{192}$
$L(p) = \frac{(1+ap)(1+bp)(1+cp)}{p^4}$	$\varepsilon = -abc\frac{T}{4} + (ab+bc+ca)\frac{T^3}{192}$ $\frac{d\varepsilon}{dt} = -abc - (ab+bc+ca)\frac{T}{4} + \frac{T^3}{192}$
$L(p) = \frac{1}{p^3(1+ap)}$	$\varepsilon = -a^2\frac{T}{4} + \frac{T^3}{192} + a^3 \,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a}$ $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{aT}{4} - a^2 \,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a}$

$$L(p) = \frac{1+bp}{p^3(1+ap)}$$

$$\mathcal{E} = a(a-b)(a\,th\,\frac{T}{4a} - \frac{T}{4}) + \frac{T^3}{192}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = (a-b)(\frac{T}{4} - a\,th\,\frac{T}{4a})$$

$$L(p) = \frac{(1+bp)^2}{p^3(1+ap)}$$

$$\mathcal{E} = -(a-b)^2\,\frac{T}{4} + \frac{T^3}{192} + a(a-b)^2\,th\,\frac{T}{4a}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = (a-2b)\,\frac{T}{4} - (a-b)^2\,th\,\frac{T}{4a}$$

$$L(p) = \frac{(1+bp)^3}{p^3(1+ap)}$$

$$\mathcal{E} = (3ab - a^2 - 3b)\,\frac{T}{4} + \frac{T^3}{192} + (a-b)^3\,th\,\frac{T}{4a}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{b^3}{a} + (a-3b)\,\frac{T}{4} + \frac{(b-a)^3}{a}\,th\,\frac{T}{4a}$$

$$L(p) = \frac{1}{p^2(1+ap)(1+bp)}$$

$$\mathcal{E} = (a+b)\,\frac{T}{4} + \frac{1}{a-b}\left(b^3\,th\,\frac{T}{4b} - a^3\,th\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{T}{4} + \frac{1}{a-b}\left(a^2\,th\,\frac{T}{4a} - b^2\,th\,\frac{T}{4b}\right)$$

$$L(p) = \frac{1+bp}{p^2(1+ap)^2}$$

$$\mathcal{E} = a(3a-2b)\ \text{th}\,\frac{T}{4a} + \frac{T}{4}\left(3a-2b+(b-a)\ \text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = (2a-b)\ \text{th}\,\frac{T}{4a} + \frac{T}{4a}\left(b-2a+(a-b)\ \text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{(1+bp)^2}{p^2(1+ap)^2}$$

$$\mathcal{E} = (b-a)\left(\frac{T}{4a}\left(b-3a+(a-b)\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)+(3a-b)\text{th}\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{T}{4} + (a-b)\left(\frac{T}{4a^2}\ (b-a)\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right) + 2\text{th}\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{(1+bp)^3}{p^2(1+ap)^2}$$

$$\mathcal{E} = -3(a-b)^2\ \text{th}\,\frac{T}{4a} + \frac{T}{4a^2}\left(3a^3-6a^2b+3ab^2-b^3 + (a-b)^3\ \text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{b^3}{a^2} + \frac{T}{4a^3}\left(b^3-3ab^2+3a^2b-2a^3+(b-a)^3\ \text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{1}{p(1+bp)^2(1+ap)}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{T}{4} - \frac{b^2}{a-b}\ \text{th}\,\frac{T}{4b} + \frac{b^2(b-2a)}{(a-b)^2}\ \text{th}\,\frac{T}{4b} + \frac{b}{a-b}\,\frac{T}{4}\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4b}\right) + \frac{a^3}{(a-b)^2}\ \text{th}\,\frac{T}{4a}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{b(b-2a)}{(a-b)^2}\ \text{th}\,\frac{T}{4b} - \frac{1}{a-b}\,\frac{T}{4}\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4b}\right) - \frac{a^2}{(a-b)^2}\ \text{th}\,\frac{T}{4a}$$

$$L(p) = \frac{1}{p(1+ap)^3}$$

$$\varepsilon = -\frac{T}{4} + 3a\,th\,\frac{T}{4a} - \frac{T}{4}\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)\left(2+\frac{T}{4a}\,th\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\,th\,\frac{T}{4a} + \frac{T}{4a}\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)\left(1+\frac{T}{4a}\,th\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{1+bp}{p(1+ap)^3}$$

$$\varepsilon = -\frac{T}{4} + (3a-b)\,th\,\frac{T}{4a} + \frac{T}{4a}\left(b-2a+(b-a)\frac{T}{4a}\,th\,\frac{T}{4a}\right)\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -th\,\frac{T}{4a} + \frac{T}{4a^2}\left(a+(a-b)\frac{T}{4a}\,th\,\frac{T}{4a}\right)\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{(1+bp)^2}{p(1+ap)^3}$$

$$\varepsilon = -\frac{T}{4} + (3a-2b)\,th\,\frac{T}{4a} + \frac{T}{4a}(b-a)\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)\left(2+\frac{a-b}{a}\frac{T}{4a}\,th\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -th\,\frac{T}{4a} + \frac{T}{4a}\,\frac{a-b}{a}\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)\left(\frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{a}\frac{T}{4a}\,th\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{(1+bp)^3}{p(1+ap)^3}$$

$$\varepsilon = -\frac{T}{4} + (b-a)\,th\,\frac{T}{4a} - \frac{T}{4a^3}(a-b)^2\left(b+2a+(a-b)\frac{T}{4a}\,th\,\frac{T}{4a}\right)\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{b^3-a^3}{a^3}\,th\,\frac{T}{4a} + \frac{T}{4a^4}(a-b)^2\left(2b+a+(a-b)\frac{T}{4a}\,th\,\frac{T}{4a}\right)\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{1}{(1+ap)^2(1+bp)^2}$$

$$\varepsilon = \frac{a^2(3b-a)}{(a-b)^3} \operatorname{th} \frac{T}{4a} - \frac{b^2(3a-b)}{(a-b)^3} \operatorname{th} \frac{T}{4b} + \frac{a}{(a-b)^2} \frac{T}{4} \left(1-\operatorname{th}^2 \frac{T}{4a}\right) + \frac{b}{(a-b)^2} \frac{T}{4} \left(1-\operatorname{th}^2 \frac{T}{4b}\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = - \frac{2ab}{(a-b)^3} \left(\operatorname{th} \frac{T}{4a} - \operatorname{th} \frac{T}{4b}\right) - \frac{1}{(a-b)^2} \frac{T}{4} \left(2-\operatorname{th}^2 \frac{T}{4a} - \operatorname{th}^2 \frac{T}{4b}\right)$$

$$L(p) = \frac{p}{(1+ap)(1+bp)^2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{(a-b)^2} \left(\frac{2ab}{a-b} \left(\operatorname{th} \frac{T}{4b} - \operatorname{th} \frac{T}{4a}\right) - \frac{T}{4} \left(2 - \operatorname{th}^2 \frac{T}{4a} - \operatorname{th}^2 \frac{T}{4b}\right)\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{(a-b)^2} \left(\frac{a+b}{a-b} \operatorname{th} \frac{T}{4a} - \frac{a+b}{a-b} \operatorname{th} \frac{T}{4b} + \frac{T}{4ab} \left(b\left(1-\operatorname{th}^2 \frac{T}{4a}\right) + a\left(1-\operatorname{th}^2 \frac{T}{4b}\right)\right)\right)$$

$$L(p) = \frac{p^2}{(1+ap)^2(1+bp)^2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{a+b}{a-b}\left(\operatorname{th} \frac{T}{4a} - \operatorname{th} \frac{T}{4b}\right) + \frac{T}{4ab}\left(b\left(1-\operatorname{th}^2 \frac{T}{4a}\right) + a\left(1-\operatorname{th}^2 \frac{T}{4b}\right)\right)\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{-2}{a-b}\left(\operatorname{th} \frac{T}{4a} - \operatorname{th} \frac{T}{4b}\right) - \frac{T}{4a^2b^2}\left(b^2\left(1-\operatorname{th}^2 \frac{T}{4a}\right) + a^2 \left(1-\operatorname{th}^2 \frac{T}{4b}\right)\right)\right)$$

$$L(p) = \frac{p^3}{(1+ap)^2(1+bp)^2}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{-2}{a-b}\left(\text{th}\,\frac{T}{4a} - \text{th}\,\frac{T}{4b}\right) - \frac{T}{4a^2b^2}\left(b^2\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right) + a^2\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4b}\right)\right)\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{a^2b^2(a-b)}\left(b^2(3a-b)\,\text{th}\,\frac{T}{4a} - a^2(3b-a)\,\text{th}\,\frac{T}{4b}\right) + \frac{T}{4}\left(\frac{1}{a^3}\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right) + \frac{1}{b^3}\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4b}\right)\right)\right) - \frac{1}{a^2b^2}$$

$$L(p) = \frac{1}{(p^2+2ap+1)^2} \qquad (a^2-1<0)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2(1-a^2)}\left(2(a^2-1)\,A + \frac{a(3-2a^2)}{\sqrt{1-a^2}}\,B - \frac{T}{4}\left(a(1-A^2+B^2) + 2\sqrt{1-a^2}\,AB\right)\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{1}{2(1-a^2)}\left(\frac{A}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{T}{4}\left(1-A^2+B^2\right)\right)$$

Voir notations page 4 .

$$L(p) = \frac{p}{(p^2+2ap+1)^2} \qquad (a^2-1<0)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2(1-a^2)}\left(\frac{A}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{T}{4}\left(1-A^2+B^2\right)\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{2(1-a^2)}\left(\frac{aA}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{T}{4}\left(a(1-A^2+B^2) + 2\sqrt{1-a^2}\,AB\right)\right)$$

Voir notations page 4 .

$$L(p) = \frac{p^2}{(p^2+2ap+1)^2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2(1-a^2)} \left(\frac{aA}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{T}{4} \left(a(1-A^2+B^2) + 2\sqrt{1-a^2}\,AB\right)\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{2(1-a^2)} \left(\frac{A}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{T}{4} \left((2a^2-1)(1-A^2+B^2 + 4a\sqrt{1-a^2}\,AB\right)\right)$$

Voir notations page 4 .

$$L(p) = \frac{p^3}{(p^2+2ap+1)^2}$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2(1-a^2)} \left(\frac{A}{1-a^2} - \frac{T}{4} \left((2a^2-1)(1-A^2+B^2) + 2\ 1-a^2\,AB\right)\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = A-1 + \frac{1}{2(1-a^2)} \left(\frac{a(3-2a^2)}{1-a^2}\,B - \frac{T}{4} \left(a(4a-3)(1-A^2+B^2) + 2(4a^2-1)\ 1-a^2\,AB\right)\right)$$

Voir notations page 4 .

$$L(p) = \frac{1}{(1+ap)^3(1+bp)}$$

$$\varepsilon = \frac{b^2}{(b-a)^3}\left(a \,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a} - b\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4b}\right) + \frac{a(2b-a)}{(a-b)^2}\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a} + \frac{1}{a-b}\,\frac{T}{4}\left(1-\mathrm{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)\left(\frac{2b-a}{1-a} + \frac{T}{4a}\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{b^2}{(b-a)^3}\left(\mathrm{th}\,\frac{T}{4b} - \mathrm{th}\,\frac{T}{4a}\right) + \frac{1}{b-a}\,\frac{T}{4a}\left(1-\mathrm{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)\left(\frac{b}{b-a} + \frac{T}{4a}\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{p}{(1+ap)^3(1+bp)}$$

$$\varepsilon = \frac{b^2}{(b-a)^3}\left(\text{th}\,\frac{T}{4b} - \text{th}\,\frac{T}{4a}\right) + \frac{1}{b-a}\,\frac{T}{4a}\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)\left(\frac{b}{b-a} + \frac{T}{4a}\,\text{th}\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{b}{(b-a)^3}\left(\text{th}\,\frac{T}{4a} - \text{th}\,\frac{T}{4b}\right) + \frac{1}{a-b}\,\frac{T}{4a^2}\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)\left(\frac{a}{b-a} + \frac{T}{4a}\,\text{th}\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{p^2}{(1+ap)^3(1+bp)}$$

$$\varepsilon = \frac{b}{(b-a)^3}\left(\text{th}\,\frac{T}{4a} - \text{th}\,\frac{T}{4b}\right) + \frac{1}{a-b}\,\frac{T}{4a^2}\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)\left(\frac{a}{b-a} + \frac{T}{4a}\,\text{th}\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{(a-b)^3}\left(\text{th}\,\frac{T}{4a} - \text{th}\,\frac{T}{4b}\right) + \frac{1}{b-a}\,\frac{T}{4a^3}\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)\left(\frac{2a-b}{b-a} + \frac{T}{4a}\,\text{th}\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{p^3}{(1+ap)^3(1+bp)}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{(a-b)^3}\left(\text{th}\,\frac{T}{4a} - \text{th}\,\frac{T}{4b}\right) + \frac{1}{b-a}\,\frac{T}{4a^3}\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)\left(\frac{2a-b}{a-b} + \frac{T}{4a}\,\text{th}\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{a^3 b}\left(\text{th}\,\frac{T}{4a} - 1\right) + \frac{1}{b(a-b)^3}\left(\text{th}\,\frac{T}{4b} - \text{th}\,\frac{T}{4a}\right)$$
$$+ \frac{1}{a-b}\,\frac{T}{4a^4}\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)\left(\frac{3a-2b}{a-b} + \frac{T}{4a}\,\text{th}\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{1}{(1+ap)^4}$$

$$\varepsilon = \frac{T}{4a}\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)\left(1 + \frac{T}{4a}\,\text{th}\,\frac{T}{4a} - \frac{T^2}{48a^2}\left(1-3\,\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)\right) - \text{th}\,\frac{T}{4a}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{T^3}{192a^4}\left(1-\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)\left(1-3\,\text{th}^2\,\frac{T}{4a}\right)$$

$$L(p) = \frac{p}{(1+ap)^4}$$

$$\varepsilon = \frac{T^3}{192a^4}\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)\left(1-3th^2\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{T^2}{48a^4}\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)\left(3th\frac{T}{4a} + \frac{T}{4a}\left(1-3th^2\frac{T}{4a}\right)\right)$$

$$L(p) = \frac{1+bp}{(1+ap)^4}$$

$$\varepsilon = -th\frac{T}{4a} + \frac{T}{4a}\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)\left(1+\frac{T}{4a}th\frac{T}{4a} + (b-a)\frac{T^2}{48a^3}\left(1-3th^2\frac{T}{4a}\right)\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{T^2}{48a^4}\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)\left(3bth\frac{T}{4a} + (b-a)\frac{T}{4a}\left(1-3th^2\frac{T}{4a}\right)\right)$$

$$L(p) = \frac{p^2}{(1+ap)^4}$$

$$\varepsilon = -\frac{T^2}{48a^4}\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)\left(3th\frac{T}{4a} + \frac{T}{4a}\left(1-3th^2\frac{T}{4a}\right)\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{T}{4a^4}\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)\left(1-\frac{T}{2a}th\frac{T}{4a} - \frac{T^2}{48a^2}\left(1-3th^2\frac{T}{4a}\right)\right)$$

$$L(p) = \frac{p(1+bp)}{(1+ap)^4}$$

$$\varepsilon = -\frac{T^2}{48a^4}\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)\left(3bth\frac{T}{4a} + (b-a)\frac{T}{4a}\left(1-3th^2\frac{T}{4a}\right)\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{T}{4a^4}\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)\left(b+(a-2b)\frac{T}{4a}th\frac{T}{4a} + (b-a)\frac{T^2}{4a^2}\left(1-3th^2\frac{T}{4a}\right)\right)$$

$$L(p) = \frac{p^3}{(1+ap)^4}$$

$$\varepsilon = -\frac{T}{4a^4}\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)\left(1-\frac{T}{2a}\,th\frac{T}{4a}-\frac{T^2}{48a^2}\left(1-3th^2\frac{T}{4a}\right)\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{a^4}\left(1-th\frac{T}{4a}\right)+\frac{T}{4a^5}\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)\left(3-\frac{3T}{4a}\,th\frac{T}{4a}-\frac{T^2}{48a^2}\left(1-3th^2\frac{T}{4a}\right)\right)$$

$$L(p) = \frac{(1+bp)^2}{(1+ap)^4}$$

$$\varepsilon = -th\frac{T}{4a}+\frac{T}{4a}\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)\left(1+(a^2-b^2)\frac{T}{4a^3}\,th\frac{T}{4a}+(a-b)^2\frac{T^2}{48a^4}\left(3th^2\frac{T}{4a}-1\right)\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{T}{4a^4}\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)\left(b^2+b(a-b)\frac{T}{2a}\,th\frac{T}{4a}+(a-b)^2\frac{T^2}{48a^2}\left(3th^2\frac{T}{4a}-1\right)\right)$$

$$L(p) = \frac{p^2(1+bp)}{(1+ap)^4}$$

$$\varepsilon = -\frac{T}{4a^4}\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)\left(b+(a-2b)\frac{T}{4a}\,th\frac{T}{4a}+(a-b)\frac{T^2}{48a^2}\left(1-3th^2\frac{T}{4a}\right)\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{b}{a^4}\left(th\frac{T}{4a}-1\right)+\frac{T}{4a^5}\left(1-th^2\frac{T}{4a}\right)\left(3a-b+(2a-3b)\frac{T}{4a}\,th\frac{T}{4a}+(a-b)\frac{T^2}{48a^2}\left(1-3th^2\frac{T}{4a}\right)\right)$$

$$L(p) = \frac{p(1+bp)^2}{(1+ap)^4}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{T}{4a^4}\,(1-\text{th}^2\frac{T}{4a})(b^2 + b(a-b)\frac{T}{2a}\;\text{th}\;\frac{T}{4a}$$

$$+ (a-b)^2\,\frac{T^2}{48a^2}\,(3\text{th}^2\frac{T}{4a} - 1))$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{b^2}{a^4}\,(1-\text{th}\,\frac{T}{4a}) + \frac{T}{4a^5}\,(1-\text{th}^2\frac{T}{4a})(b(3b-2a)$$

$$+ (4a-3b^2-a^2)\,\frac{T}{4a}\;\text{th}\;\frac{T}{4a} - (a-b)^2\,\frac{T^2}{48a^2}\,(1-3\text{th}^2\frac{T}{4a}))$$

$$L(p) = \frac{(1+bp)^3}{(1+ap)^4}$$

$$\mathcal{E} = -\,\text{th}\,\frac{T}{4a} + \frac{T}{4a^4}\,(1-\text{th}^2\frac{T}{4a})(a^3-b^3+(a^3-3a^2b+2b^3)\,\frac{T}{4}\;\text{th}\;\frac{T}{4a}$$

$$+ (b-a)\,\frac{T^2}{48}\,(1-3\text{th}^2\frac{T}{4a}))$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{a^4}\,(\text{th}\,\frac{T}{4a} - 1) - \frac{T}{4a^5}\,(1-\text{th}^2\frac{T}{4a})(3b(a-b)$$

$$+ 3b(a-b)^2\,\frac{T}{4a}\;\text{th}\;\frac{T}{4a} + (b-a)^3\,\frac{T^2}{48a^2}\,(1-3\text{th}^2\frac{T}{4a}))$$

I - 5 - SYSTEMES DU CINQUIEME ORDRE .

$$L(p) = \frac{1}{p^5}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{T^5}{7680}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$$

$$L(p) = \frac{1}{(1+ap)^5}$$

$$\mathcal{E} = -\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a} + \frac{T}{4a}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)\left(1 + \frac{T}{4a}\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a}\right.$$
$$\left. + \frac{T^2}{48a^2}\left(3\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a}\left(1+\frac{T}{4a}\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a}\right) - 1 - \frac{T}{2a}\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a}\right)\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{T^4}{768a^5}\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)\left(3\,\mathrm{th}^2\frac{T}{4a} - 2\right)$$

$$L(p) = \frac{p}{(1+ap)^5}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{T^4}{768a^5}\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)\left(3\,\mathrm{th}^2\frac{T}{4a} - 2\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{T^3}{192a^5}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)\left(1-3\,\mathrm{th}^2\frac{T}{4a} + \frac{T}{4a}\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a}\left(3\,\mathrm{th}^2\frac{T}{4a} - 2\right)\right)$$

$$L(p) = \frac{p^2}{(1+ap)^5}$$

$$\mathcal{E} = \frac{T^3}{192a^5}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)\left(1-3\,\mathrm{th}^2\frac{T}{4a} + \frac{T}{4a}\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a}\left(3\,\mathrm{th}^2\frac{T}{4a} - 2\right)\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{T^2}{16a^5}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)\left(\mathrm{th}\,\frac{T}{4a} + \frac{T}{6a}\left(1-3\,\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{T^2}{48a^2}\,\mathrm{th}\,\frac{T}{4a}\left(3\,\mathrm{th}^2\frac{T}{4a} - 2\right)\right)$$

$$L(p) = \frac{p^3}{(1+ap)^5}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{T^2}{16a^5}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)\left(\mathrm{th}\frac{T}{4a} + \frac{T}{6a}\left(1-3\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right) + \frac{T^2}{48a^2}\,\mathrm{th}\frac{T}{4a}\left(3\mathrm{th}^2\frac{T}{4a} - 2\right)\right)$$

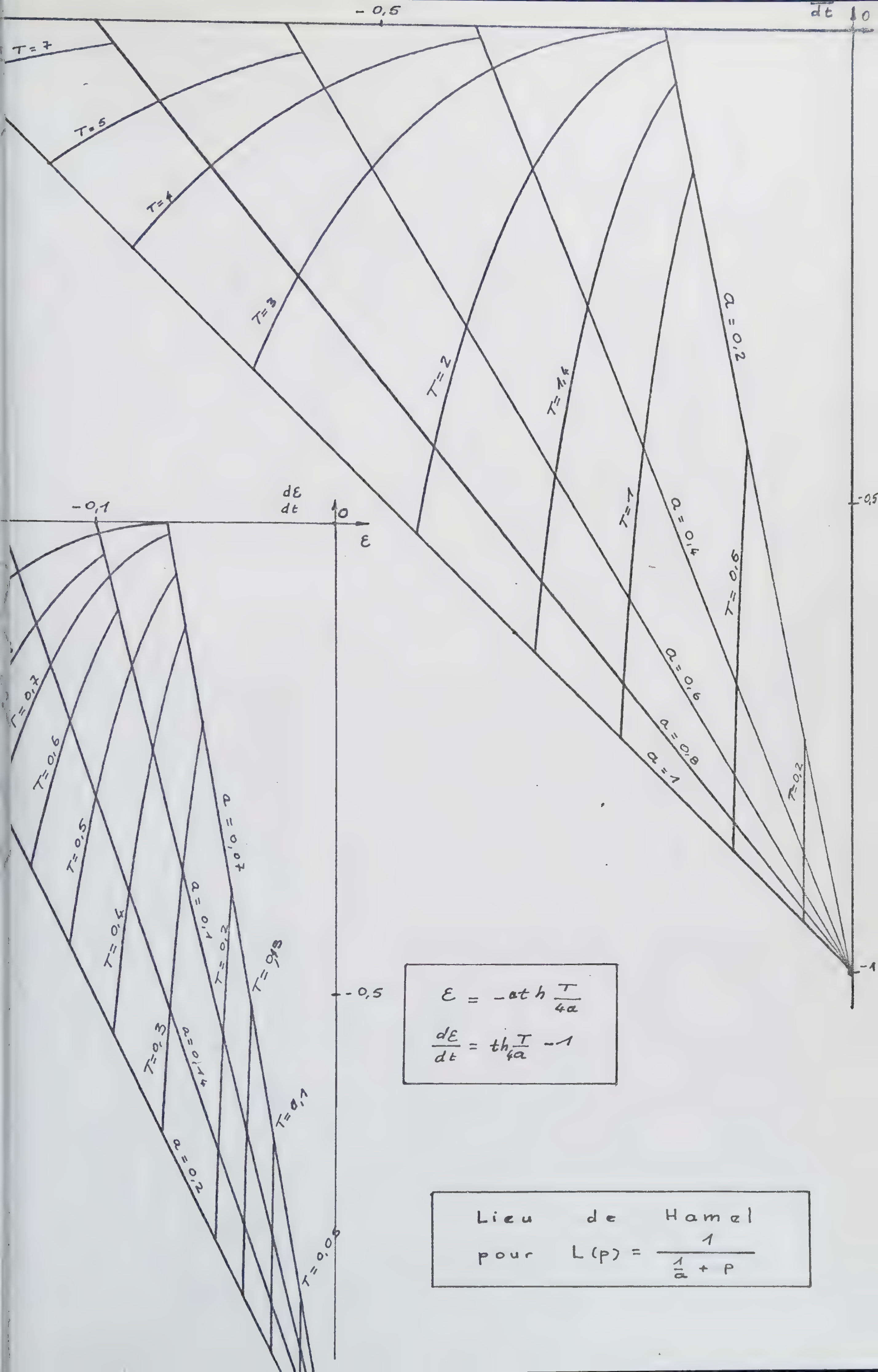
$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{T}{4a^5}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)\left(1-\frac{3T}{4a}\,\mathrm{th}\frac{T}{4a} - \frac{T^2}{16a^2}\left(1-3\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right) + \frac{T^3}{192a^3}\,\mathrm{th}\frac{T}{4a}\left(3\mathrm{th}^2\frac{T}{4a} - 2\right)\right)$$

$$L(p) = \frac{p^4}{(1+ap)^5}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{T}{4a^5}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)\left(1-\frac{3T}{4a}\,\mathrm{th}\frac{T}{4a} - \frac{T^2}{16a^2}\left(1-3\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right) - \frac{T^3}{192a^3}\,\mathrm{th}\frac{T}{4a}\left(3\mathrm{th}^2\frac{T}{4a} - 2\right)\right)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{1}{a^5}\left(1-\mathrm{th}\frac{T}{4a}\right) + \frac{T}{a^6}\left(1-\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right)\left(1-\frac{3T}{8a}\,\mathrm{th}\frac{T}{4a} - \frac{T^2}{48a^2}\left(1-3\mathrm{th}^2\frac{T}{4a}\right) - \frac{T^3}{768a^3}\,\mathrm{th}\frac{T}{4a}\left(3\mathrm{th}^2\frac{T}{4a} - 2\right)\right)$$

- II - TRACES DE LIEUX DE HAMEL .

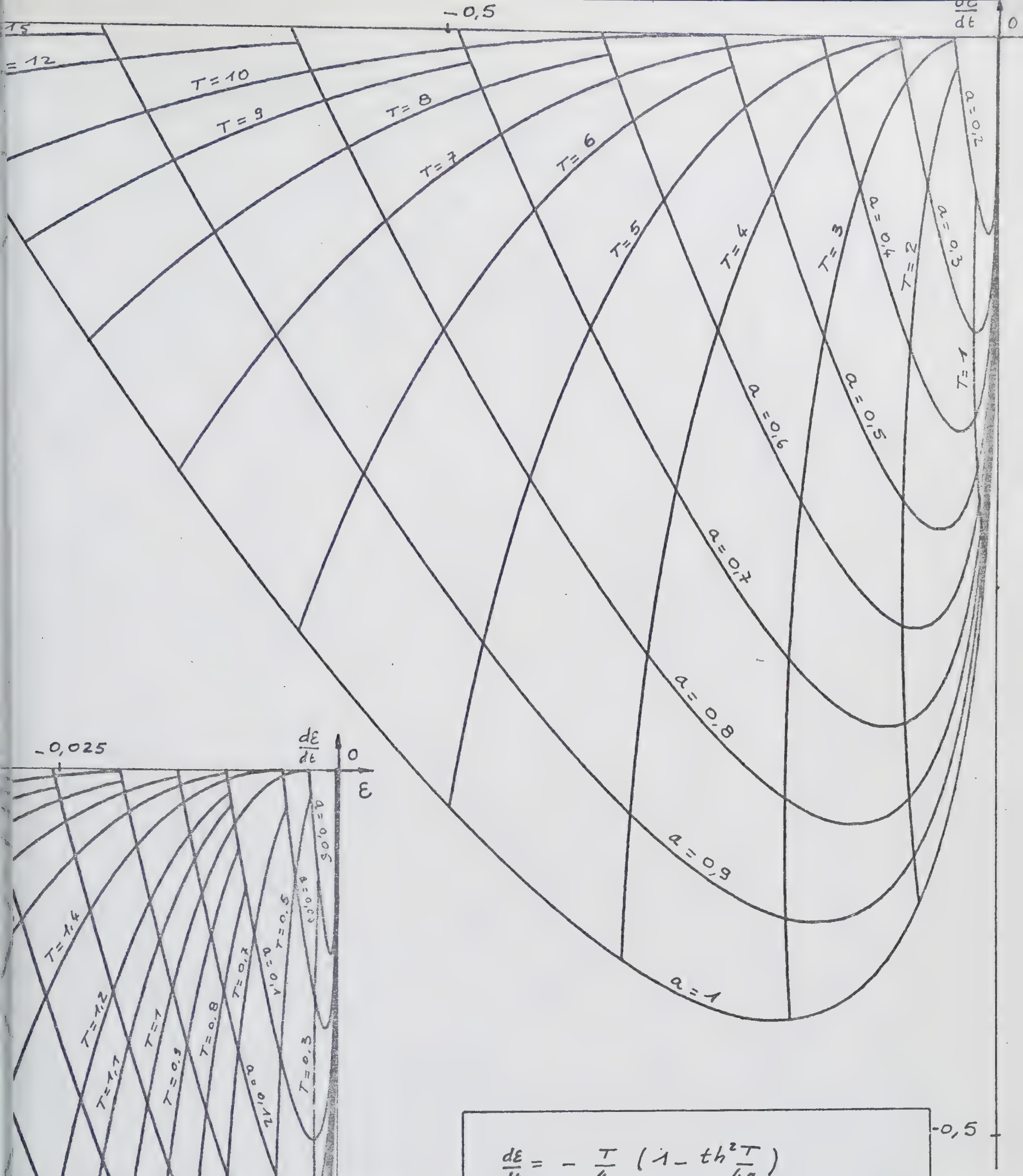


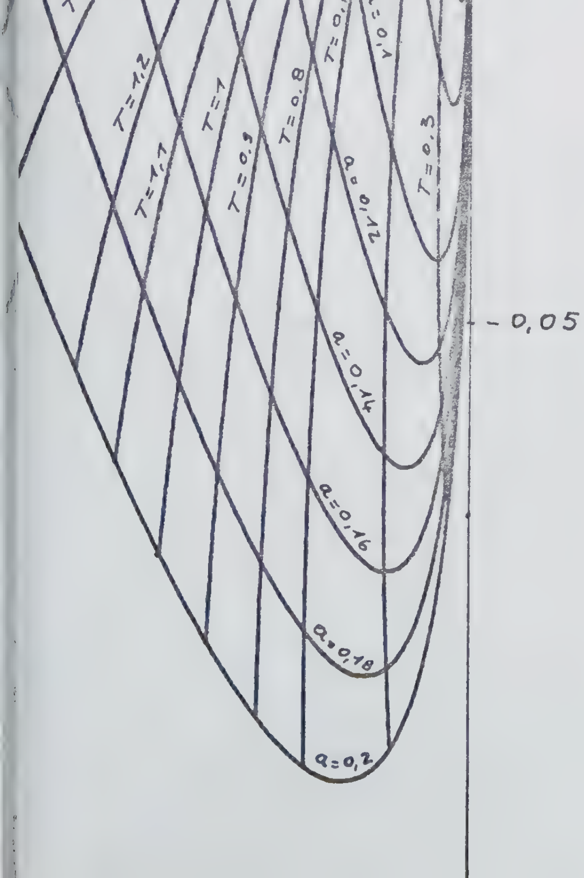
$$\varepsilon = -a\,th\,\frac{T}{4a}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = th\frac{T}{4a} - 1$$

Lieu de Hamel

pour $L(p) = \dfrac{1}{\frac{1}{a} + p}$



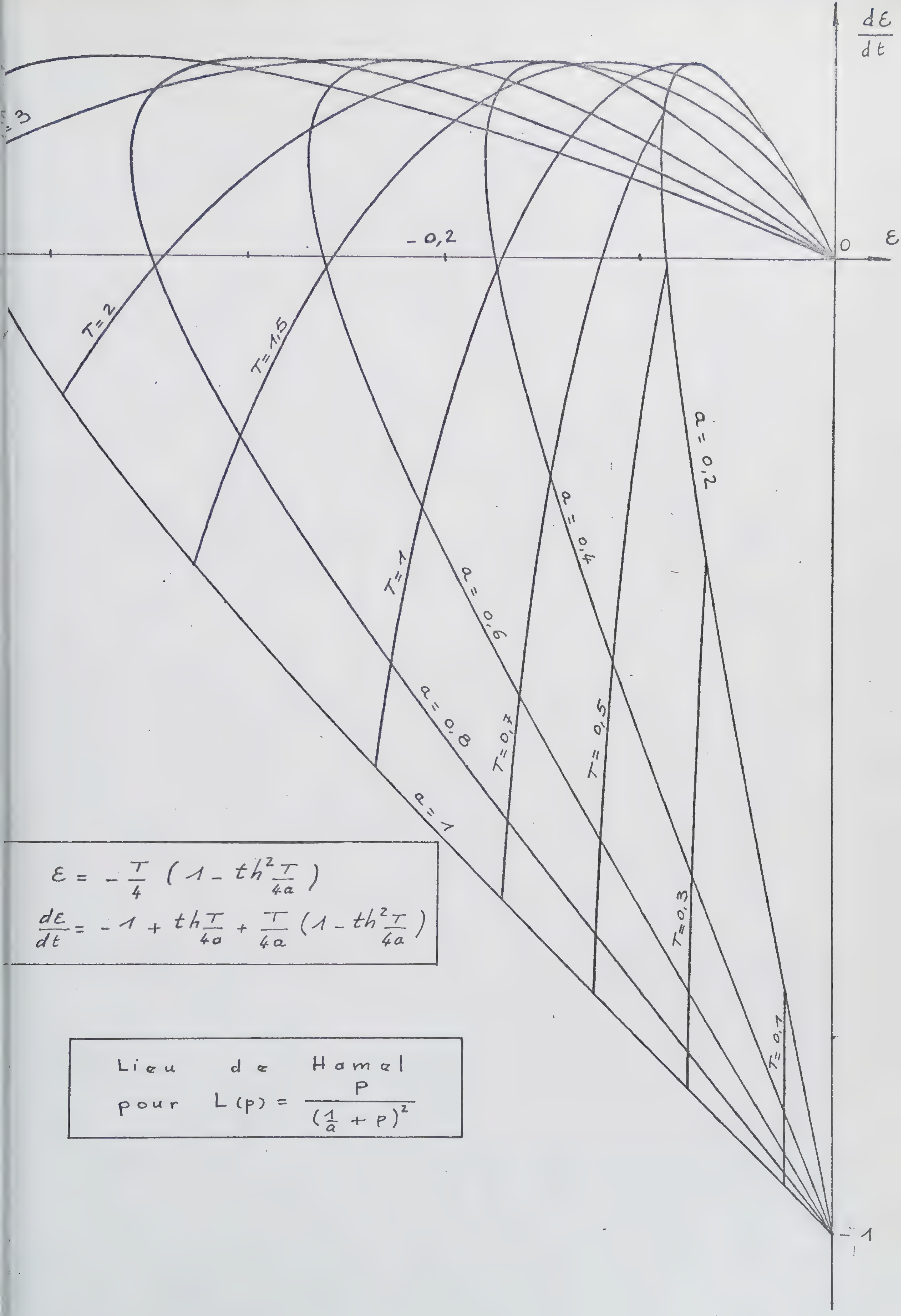


$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{T}{4}\left(1 - th^2\frac{T}{4a}\right)$$

$$\varepsilon = -a^2\, th\frac{T}{4a} + \frac{aT}{4}\left(1 - th^2\frac{T}{4a}\right)$$

Lieu de Hamel

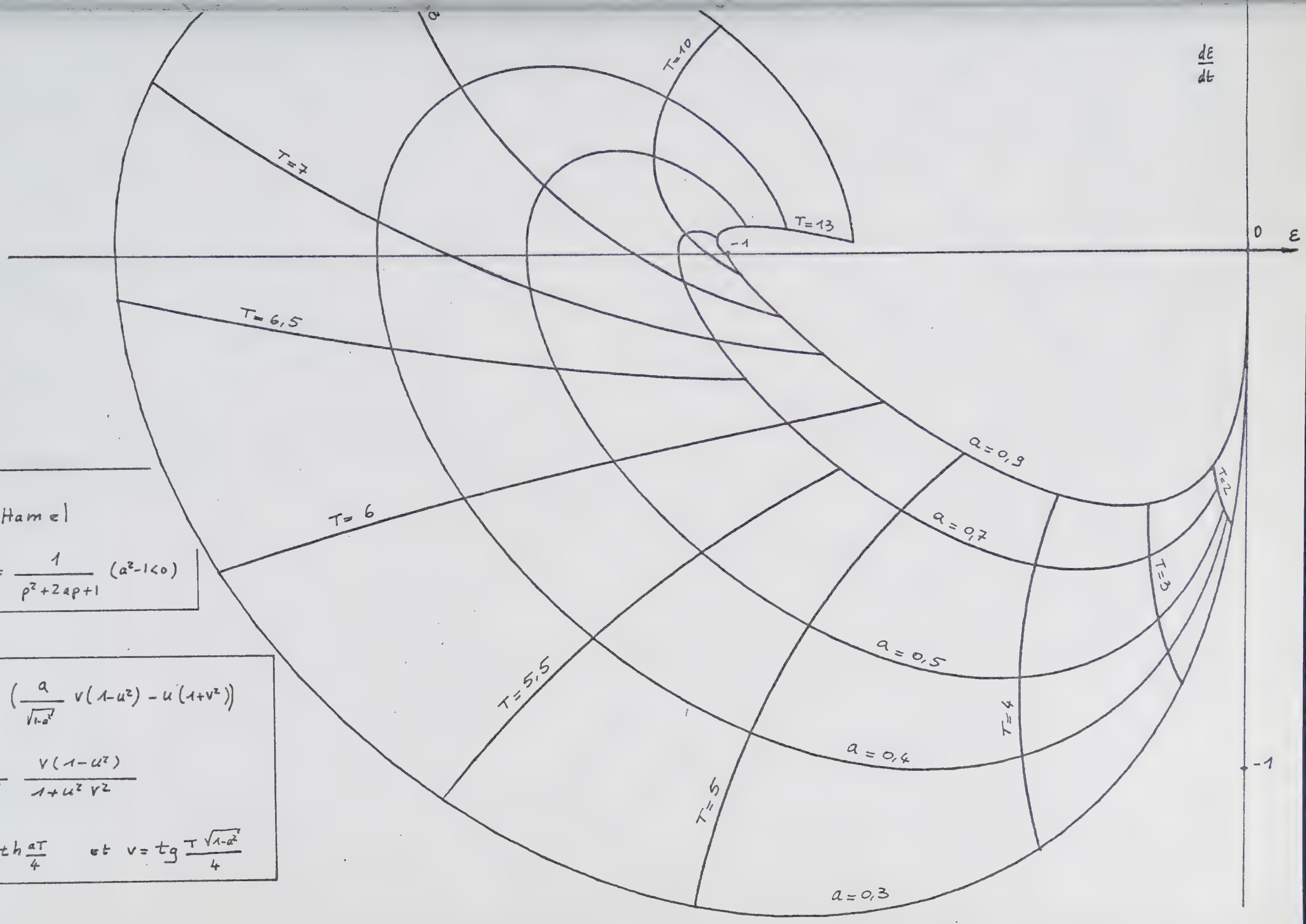
pour $L(p) = \frac{1}{\left(\frac{1}{a} + p\right)^2}$



$$\varepsilon = -\frac{T}{4}\left(1 - th^2\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -1 + th\frac{T}{4a} + \frac{T}{4a}\left(1 - th^2\frac{T}{4a}\right)$$

Lieu de Hamel pour $L(p) = \dfrac{p}{\left(\frac{1}{a} + p\right)^2}$



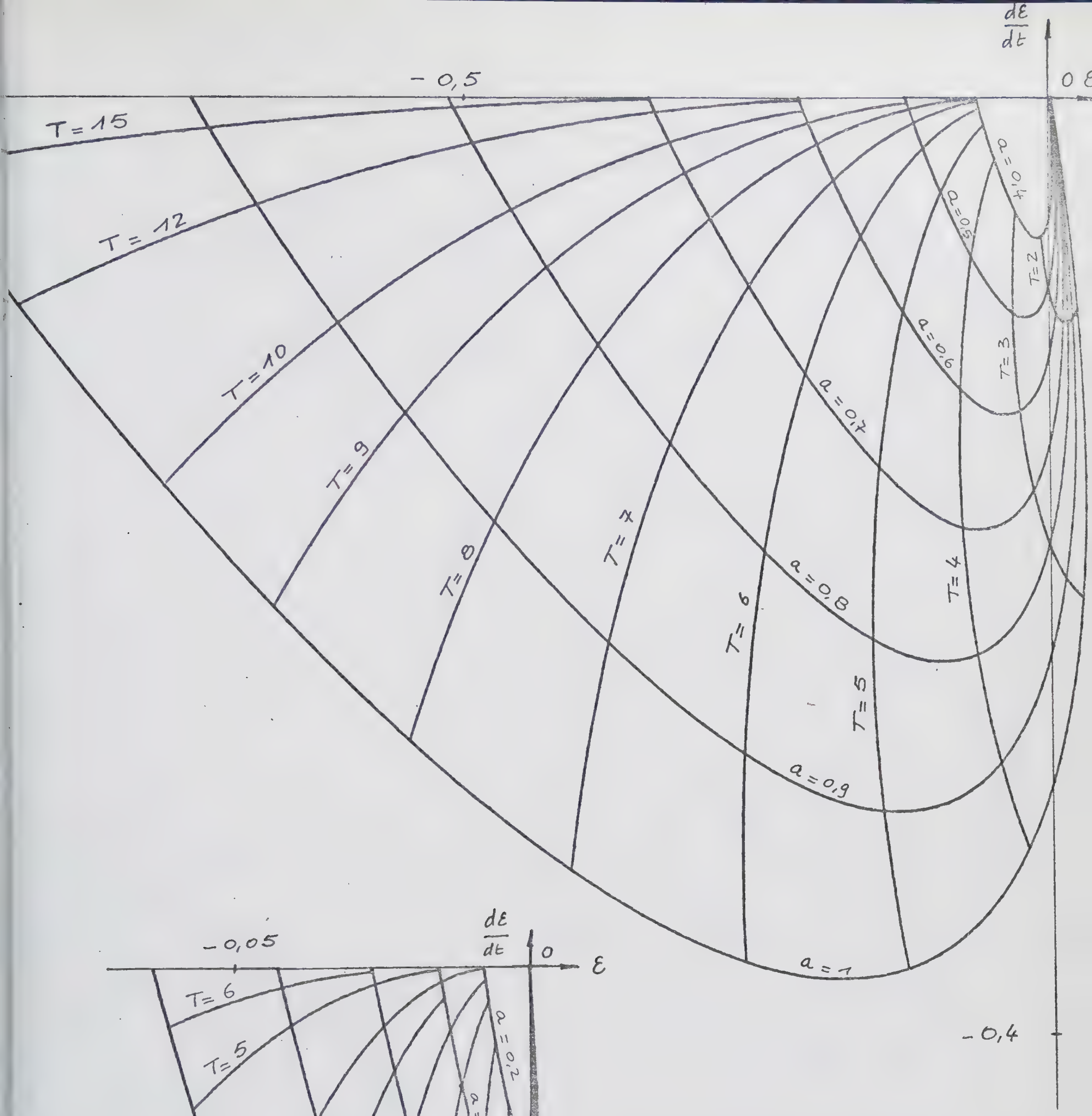
Lieu de Hamel

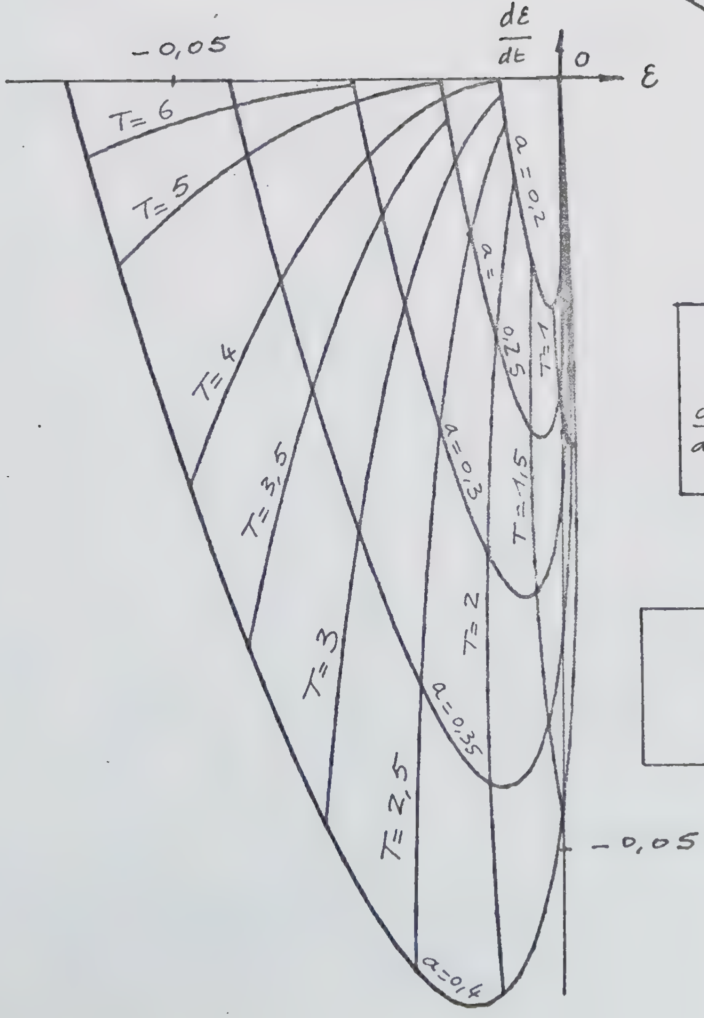
pour $L(p) = \dfrac{1}{p^2+2ap+1}$ $(a^2-1<0)$

$$\varepsilon = \frac{1}{1+u^2v^2}\left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\, v(1-u^2) - u(1+v^2)\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\ \frac{v(1-u^2)}{1+u^2v^2}$$

avec $u = th\,\dfrac{aT}{4}$ et $v = tg\,\dfrac{T\sqrt{1-a^2}}{4}$

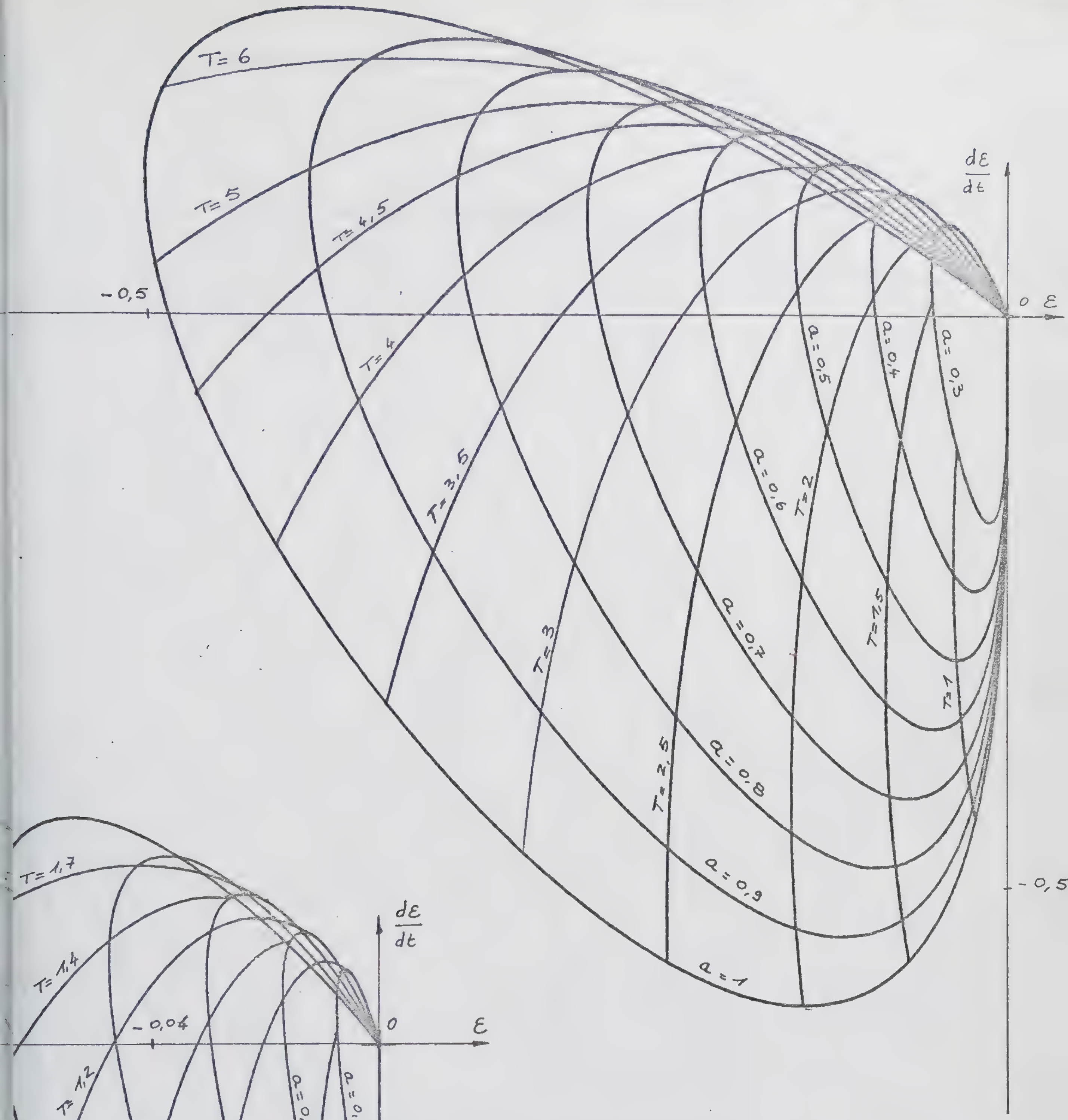


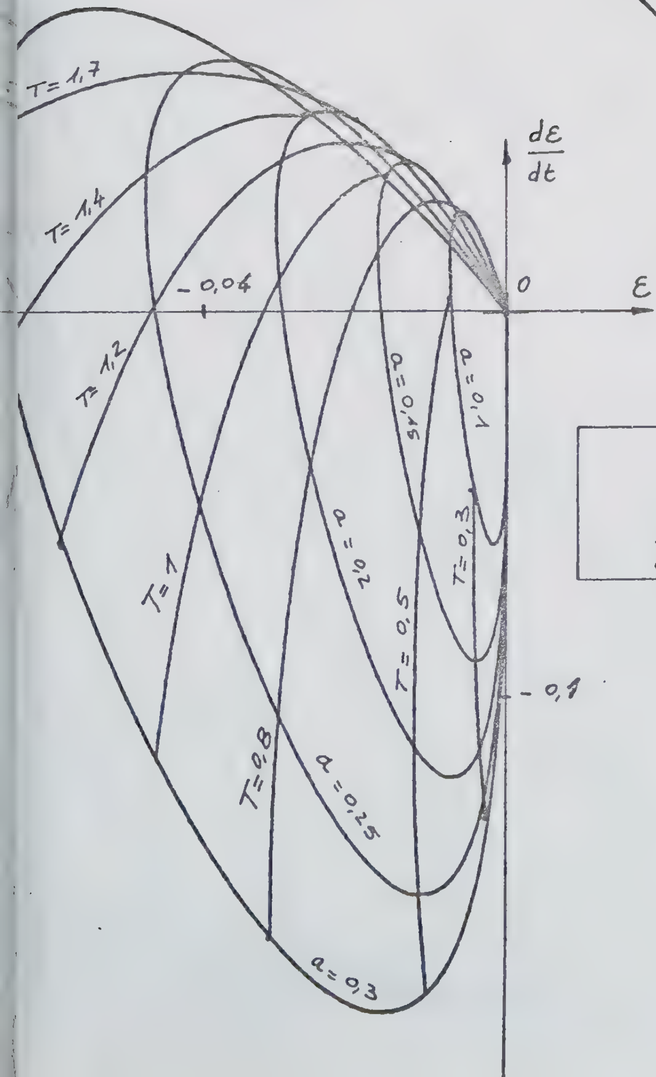


$$\varepsilon = -a^3\, th\frac{T}{4a} + \frac{a^2T}{4}\left(1 - th^2\frac{T}{4a}\right)\left(1 + \frac{T}{4a}\, th\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{T^2}{16}\, th\frac{T}{4a}\left(1 - th^2\frac{T}{4a}\right)$$

Lieu de Hamel pour $L(p) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a} + p\right)^3}$



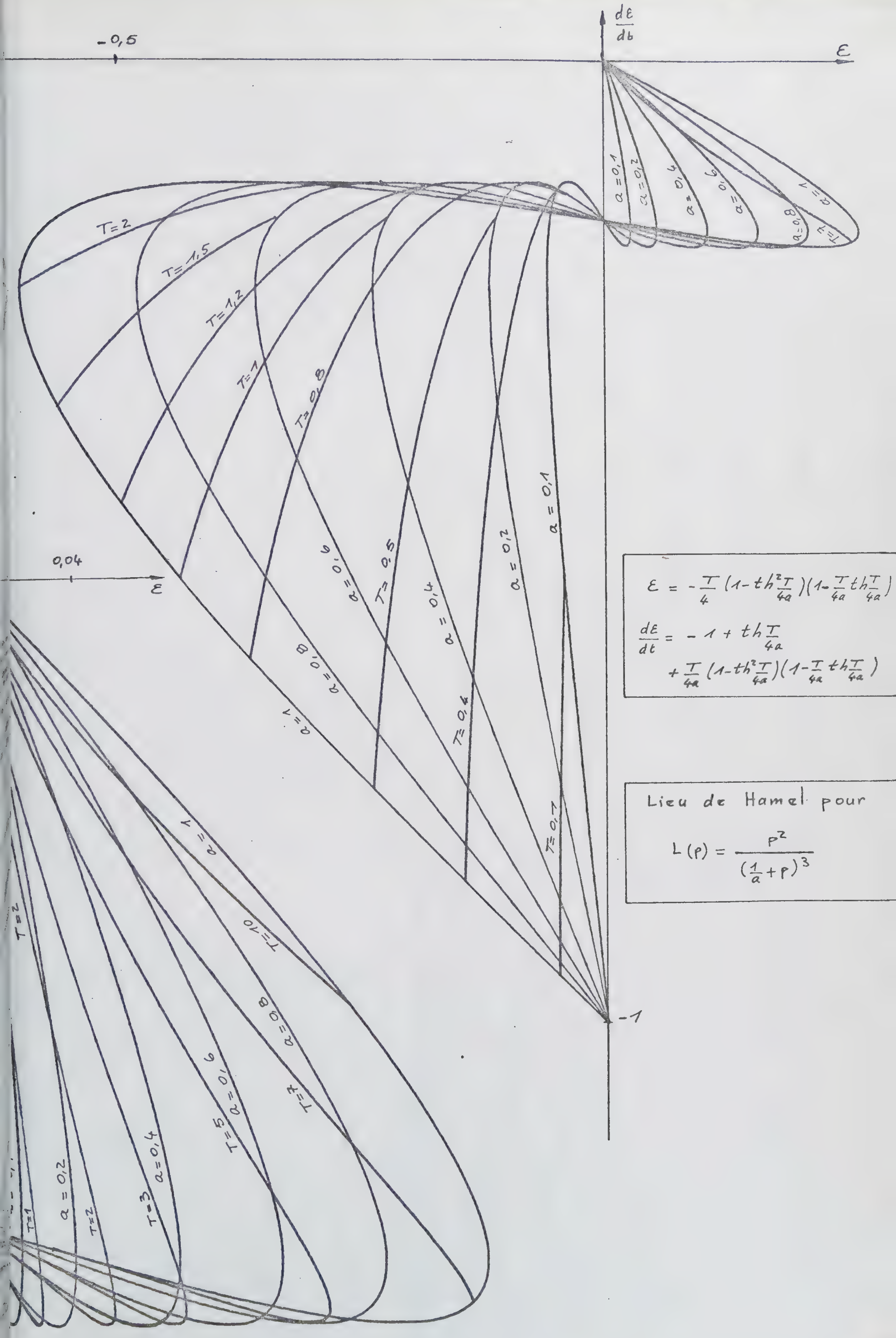


$$\varepsilon = -\frac{T^2}{16}\, th\frac{T}{4a}\left(1 - th^2\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{T}{4}\left(1 - th^2\frac{T}{4a}\right)\left(1 - \frac{T}{4a}\, th\frac{T}{4a}\right)$$

Lieu de Hamel pour

$$L(p) = \frac{p}{\left(\frac{1}{a} + p\right)^3}$$

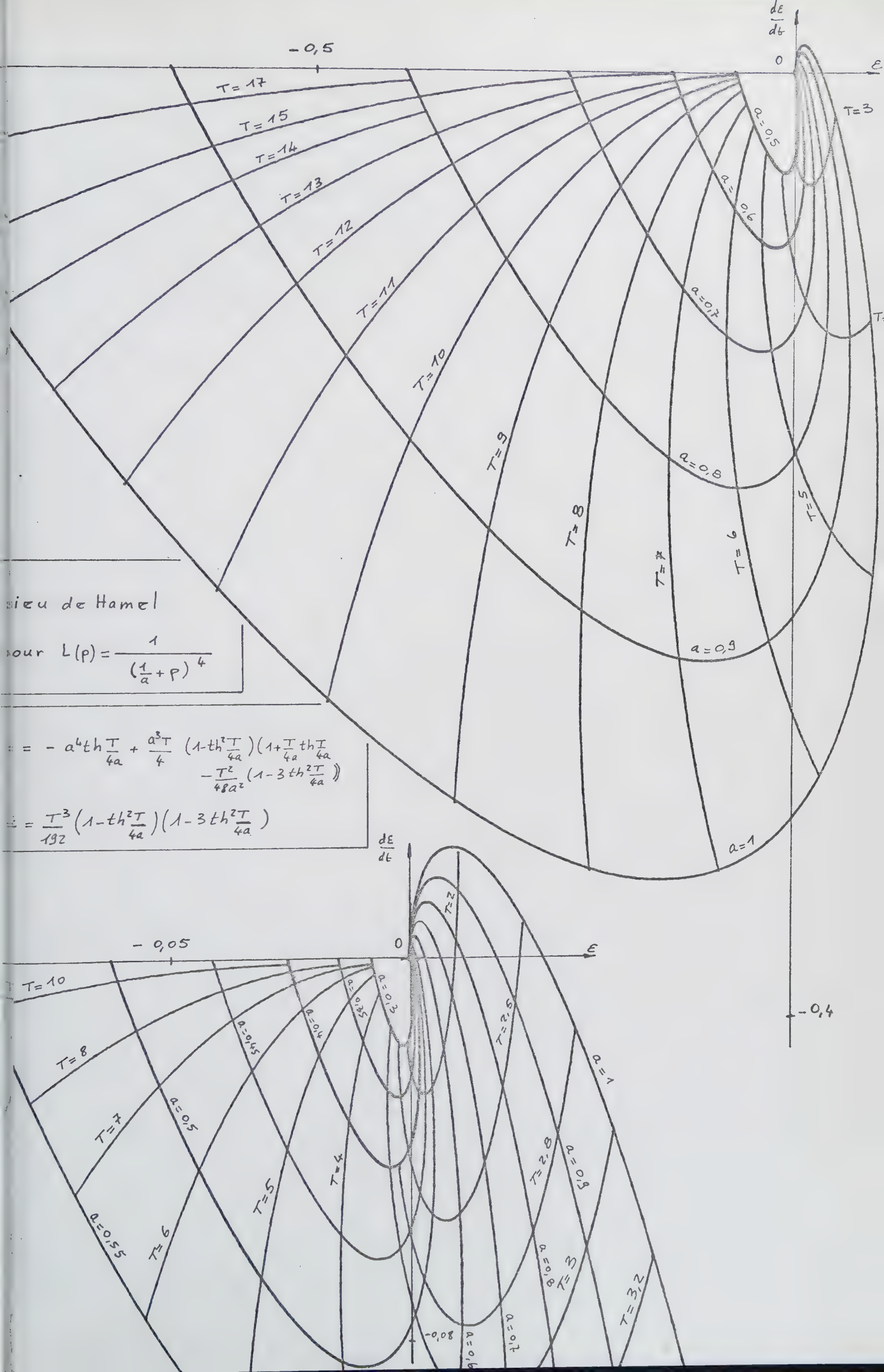


$$\varepsilon = -\frac{T}{4}\left(1 - th^2\frac{T}{4a}\right)\left(1 - \frac{T}{4a}\, th\frac{T}{4a}\right)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -1 + th\frac{T}{4a} + \frac{T}{4a}\left(1 - th^2\frac{T}{4a}\right)\left(1 - \frac{T}{4a}\, th\frac{T}{4a}\right)$$

Lieu de Hamel pour

$$L(p) = \frac{p^2}{\left(\frac{1}{a} + p\right)^3}$$



…sieu de Hamel

…our $L(p) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}+p\right)^4}$

$\ldots = -a^4 \operatorname{th}\frac{T}{4a} + \frac{a^3 T}{4}\left(1-\operatorname{th}^2\frac{T}{4a}\right)\left(1+\frac{T}{4a}\operatorname{th}\frac{T}{4a} - \frac{T^2}{48a^2}\left(1-3\operatorname{th}^2\frac{T}{4a}\right)\right)$

$\ldots = \frac{T^3}{192}\left(1-\operatorname{th}^2\frac{T}{4a}\right)\left(1-3\operatorname{th}^2\frac{T}{4a}\right)$

- III - LISTINGS .

```
 FOR                   ** PROGRAMME PRINCIPAL **
AME PPRIN
OCS(CARD,1132 PRINTER)
NE WORD INTEGERS
IST SOURCE PROGRAM
      DIMENSION X(18,10),XE(10),XR(18),XT(18)
      DIMENSION A(10),B(10),AA(10),BB(10),DERY(10),PRMT(5),AS(10),BS(10)
     1,AT(10),BT(10),AW(10),BW(10)
      COMMON T,RO,N,M,A,B,AA,BB,EN,ENM1,IAIG,ICARD,IWRIT,LARGE,NX,NX1,NX
     1T,NA,MB,NV,NV1,MV,MV1,NCR,NCR1,MDR,MDR1,NCD,NCD1,MDD,MDD1,IMP,ITMA
     2X,ITER,I,J,K,L,IX,IIX,KOUNT,KOD1,KOD2,INDIC,IAUX,LARG1,KOMPT,IB,AM
     3DIF,TRUP,PI,WMAXI,WMINI,FMIN,OMEGA,DERY,PRMT,AS,BS,AT,BT,AW,BW,PAS
     4,TPIM,SPIM
LECTURE DES PARAMETRES
      CALL LEC(X)
INITIALISATIONS
       IF(KOD1)20,100,100
       DO 80 KOD1=KOD2,LARGE
      DO 75 J=1,NX
      XR(J)=X(J,KOD1)
      CALL CRIT(XR)
      DO 80 J=NX1,NXT
      X(J,KOD1)=XR(J)
      KOD1=0
DEBUT D'ITERATION
REGENERATIONS,TRIS,TESTS ET IMPRESSIONS EVENTUELLES
 0    CALL SCRIP(X)
      IF(IIX)10,20,110
BARYCENTRE DES POINTS AUTRES QUE CELUI DONNANT LE CRITERE MAXI (POINT XE
                            CALCUL DE XR
 0    DO 150 I=1,NX
      XT(I)=0.
      DO 140 J=1,LARG1
 0    XT(I)=XT(I)+X(I,J)
      XE(I)=XT(I)/LARG1
 0    XR(I)=XE(I)+XE(I)-X(I,LARGE)
AIGUILLAGE EVENTUEL SI LE DERNIER POINT ADOPTE EST DU TYPE XR
               ET LE MOINS BON DE TOUS
      GOTO(205,155),INDIC
 5    CALL CRIT(XR)
MISE A JOUR DU CODE
      KOD1=IAUX+100
      KOD2=IAIG
TEST D'EFFICACITE DE XR PAR RAPPORT A XMIN  ( STOCKE DANS X(I,1) )
      IF(XR(NX1)-X(NX1,1))160,170,170
ETAPE D'ACCELERATION
 0    DO 180 I=1,NX
      XT(I)=XR(I)+XE(I)-X(I,LARGE)
 0    XE(I)=XR(I)
      CALL CRIT(XT)
TEST DE L'EFFICACITE DE XT PAR RAPPORT A XR
      IF(XT(NX1)-XR(NX1))185,200,200
 5    DO 175 I=1,NXT
 5    XR(I)=XT(I)
MISE A JOUR DU CODE
      KOD1=IAUX+200
      KOD2=IAIG
      GO TO 160
TEST DE L'EFFICACITE DE XR PAR RAPPORT A XMAX ( STOCKE DANS X(I,LARGE) )
 0    IF(XR(NX1)-X(NX1,LARGE))195,190,190
 5    INDIC=1
 0    DO 210 I=1,NXT
 0    X(I,LARGE)=XR(I)
      GO TO 100
CALCUL DU BARYCENTRE GENERAL
 5    INDIC=2
 0    DO 240 I=1,NX
 0    XR(I)=(XT(I)+X(I,LARGE))/LARGE
      CALL CRIT(XR)
MISE A JOUR DU CODE
      KOD1=IAUX+300
      KOD2=IAIG
      GO TO 200
      END

ATURES SUPPORTED
NE WORD INTEGERS
OCS

RE REQUIREMENTS FOR PPRIN
OMMON     298  VARIABLES     456  PROGRAM     464

D OF COMPILATION
```

```
 FOR                    **  SUBROUTINE LEC **                    page 1/2
NE WORD INTEGERS
IST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE LEC(X)
      DIMENSION X(18,10)
      DIMENSION A(10),B(10),AA(10),BB(10),DERY(10),PRMT(5),AS(10),BS(10)
     1,AT(10),BT(10),AW(10),BW(10)
      COMMON T,RO,N,M,A,B,AA,BB,EN,ENM1,IAIG,ICARD,IWRIT,LARGE,NX,NX1,NX
     1T,NA,MB,NV,NV1,MV,MV1,NCR,NCR1,MDR,MDR1,NCD,NCD1,MDD,MDD1,IMP,ITMA
     2X,ITER,I,J,K,L,IX,IIX,KOUNT,KOD1,KOD2,INDIC,IAUX,LARG1,KOMPT,IB,AM
     3DIF,TRUP,PI,WMAXI,WMINI,FMIN,OMEGA,DERY,PRMT,AS,BS,AT,BT,AW,BW,PAS
     4,TPIM,SPIM
      ICARD=2
      IWRIT=3
      READ(ICARD,90)FMIN,ITMAX,IMP
      READ(ICARD,10)NA,MB,NV,MV,NCR,MDR,NCD,MDD,LARGE,KOD2,ITER
      KOUNT=IMP
      IIX=1
      KOMPT=ITER
      IB=-1
      TPIM=1.
      SPIM=-1.
      AMDIF=.95
      INDIC=2
      NV1=NV+1
      MV1=MV+1
      NCR1=NCR+1
      MDR1=MDR+1
      NCD1=NCD+1
      MDD1=MDD+1
      PI=3.141593
      LARG1=LARGE-1
      PRMT(4)=.00005
      NX=2+NV1+MV1+MDR1+NCR1+NCD1+MDD1
      NX1=NX+1
      NXT=NX1+7
3TEST SUR LA DIMENSION DE X
      X(1,2)=-1.
      DO 3 I=10,NXT
      X(I,1)=1.
      IF(X(1,2))3,3,2
      I=I-1
      WRITE(IWRIT,400)NXT,NX,I
      GO TO 70
      CONTINUE
3TEST DE COMPATIBILITE ENTRE LES CODES
        KOD1=KOD2-NXT
      IF(KOD1)30,40,50
      IF(KOD2-NX)50,40,50
      J=NA+1
      K=MB+1
3TEST SUR L'ETAT DE LA CLE 1(CLE A 1= ENTREE EN E16.7 , CLE A 0=ENTREE EN
      CALL DATSW(1,IX)
      GOTO(5,4),IX                                                    F8.4)
MENTREE EN FORMAT F
      READ(ICARD,20)(AA(I),I=1,J)
      READ(ICARD,20)(BB(I),I=1,K)
      DO 100 I=1,LARGE
 0    READ(ICARD,20)(X(L,I),L=1,KOD2)
      KOD2=1
DECRITURES D'EN-TETE
      WRITE(IWRIT,324)J,(AA(I),I=1,J)
      WRITE(IWRIT,325)K,(BB(I),I=1,K)
      IF(KOD1)7,8,8
      WRITE(IWRIT,290)
      RETURN
      WRITE(IWRIT,300)
      RETURN
MENTREE EN FORMAT E
      READ(ICARD,21)(AA(I),I=1,J)
      READ(ICARD,21)(BB(I),I=1,K)
      DO 101 I=1,LARGE
 1    READ(ICARD,21)(X(L,I),L=1,KOD2)
      GO TO 6
      WRITE(IWRIT,350)
      PAUSE 1
      GO TO 1
```

page 2/2

```
)     FORMAT(' '/' POINTS DE DEPART CALCULES')
3     FORMAT(' '/' ENTREE DIRECTE DES POINTS DE DEPART')
3     FORMAT(' ERREUR DANS LES CODES DE DEPART'/' ENTRER LES DONNEES A N
     1OUVEAU')
      FORMAT(10I2,I3)
      FORMAT(10F8.4)
      FORMAT(5E16.7)
      FORMAT(F10.7,2I4)
4     FORMAT('1'/' AA(I) I=1,',I2/' ',15F8.4)
5     FORMAT(' '/' BB(I) I=1,',I2/' ',15F8.4)
)     FORMAT(' LA DIMENSION DONNEE A LA MATRICE X EST TROP FAIBLE'/' ELL
     1E DOIT ETRE DANS CE CAS DE (',I2,',',I2,') AU MINIMUM'/' ENTRER UN
     2 NOUVEAU JEU DE DONNEES NE COMPORTANT PAS PLUS DE ',I2,' PARAMETRE
     3S VARIABLES OU NON')
      END

ATURES SUPPORTED
NE WORD INTEGERS

RE REQUIREMENTS FOR LEC
OMMON     298  VARIABLES        2  PROGRAM    744

LATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 00F4 (HEX)

) OF COMPILATION
```

** SUBROUTINE SCRIP **

page 1/3

```
 FOR
NE WORD INTEGERS
IST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE SCRIP(X)
      DIMENSION X(18,10)
      DIMENSION A(10),B(10),AA(10),BB(10),DERY(10),PRMT(5),AS(10),BS(10)
     1,AT(10),BT(10),AW(10),BW(10),IV(2,6),IVEC(6),ICAR(3,9)
      COMMON T,RO,N,M,A,B,AA,BB,EN,ENM1,IAIG,ICARD,IWRIT,LARGE,NX,NX1,NX
     1T,NA,MB,IV,IMP,ITMAX,ITER,I,J,K,L,IX,IIX,KOUNT,KOD1,KOD2,INDIC,IAU
     2X,LARG1,KOMPT,IB,AMDIF,TRUP,PI,WMAXI,WMINI,FMIN,OMEGA,DERY,PRMT,AS
     3,BS,AT,BT,AW,BW,PAS,TPIM,SPIM
      DATA IVEC,IPO,IPFEG,ICAR,IEGBL/'AV','BV','CR','DR','CD','DD','(','
     1)=','CR','IT','ER','SU','P ','S ','SU','P ','T ','DE','LT','A ','H
     2Y','ST','ER','PE','RI','OD','S.','PI','C ','T.','PI','C ','RO','
     3','  ','= '/
      TENU=X(NX1,LARGE)
ELIMINATION DES ERREURS D'ARRONDI SUR LES PARAMETRES CONSTANTS
      DO 83 I=1,NX
      A(I)=AMDIF
      ENM1=ABS(X(I,1))*2.E-07
       DO 82 J=2,LARG1
      EN=ABS(X(I,1)-X(I,J))-ENM1
       IF(EN)82,83,83
      CONTINUE
      X(I,LARGE)=X(I,1)
       A(I)=1.
      CONTINUE
TRI  DES DIFFERENTS POINTS PAR CRITERE CROISSANT
      DO 93 I=1,LARG1
      K=I+1
      DO 93 J=K,LARGE
      IF(X(NX1,I)-X(NX1,J))93,93,91
      DO 92 L=1,NXT
      EN=X(L,I)
      X(L,I)=X(L,J)
      X(L,J)=EN
      INDIC=2
      CONTINUE
TEST SUR L'ETAT DE LA CLE 15 (ARRET MANUEL)
      CALL DATSW(15,I)
      GOTO(1,2),I
      WRITE(IWRIT,240)
      PAUSE 15
      GO TO 115
TEST DE PREMIERE ECRITURE
      IF(KOD1)24,22,23
      WRITE(IWRIT,28)ITER
      GO TO 135
      WRITE(IWRIT,29)ITER
      GO TO 135
TEST DE NOUVEAU POINT DE DEPART (DEBLOCAGE)
      IF(KOD2-1)21,21,26
      WRITE(IWRIT,27)ITER
```

```
      GO TO 135
 TEST DE PROXIMITE ENTRE LES VALEURS DES DIFFERENTS CRITERES
      EN=0.
      DO 3 I=2,LARGE
      EN=EN+ABS(X(NX1,I)-X(NX1,1))
      EN=EN/ABS(X(NX1,1))-.05*LARGE*FMIN
      IF(EN)4,4,94
      WRITE(IWRIT,280)
      GO TO 115
 TEST DE CALCUL DE TOUS LES 'SPIC'
      IB=IB+1
      J=NX1+6
      DO 96 I=1,LARGE
      IF(X(J,I))95,95,96
      IB=-1
      GO TO 100
      CONTINUE
      IF(IB)100,99,99
 EVALUATION DE SPIM ET DE TPIM
      SPIM=X(NX1+6,1)
      TPIM=X(NXT,1)
 TEST SUR LE NOMBRE MAXI D'ITERATION
 0    IF(ITMAX-ITER)1000,1000,110
 00   WRITE(IWRIT,230)
      GO TO 115
 TEST SUR LE CRITERE DU MEILLEUR POINT
 0    IF(X(NX1,1)-FMIN)1010,1010,120
 0    KOUNT=KOUNT-1
 TEST SUR LE PAS D'IMPRESSION
      IF(KOUNT)130,130,30
 10   WRITE(IWRIT,300)
 5    IIX=-1
 0    KOUNT=IMP
      WRITE(IWRIT,292)ITER,KOD1,KOD2
 5    K=7
      IAIG=1
      IF(LARGE-K)260,250,250
 0    K=LARGE
 0    WRITE(IWRIT,310)(X(1,J),J=IAIG,K)
      WRITE(IWRIT,430)(ICAR(I,9),I=1,3),IEGBL,(X(2,I),I=IAIG,K)
      L=2
      DO 500 IAUX=1,6
      IF(IV(1,IAUX))500,400,400
 0    J=IV(2,IAUX)
      DO 410 I=1,J
      IX=I+L
 0    WRITE(IWRIT,420)IVEC(IAUX),IPO,I,IPFEG,(X(IX,KOD1),KOD1=IAIG,K)
       L=IX
 0     CONTINUE
      DO 600 IAUX=1,8
      J=IAUX+NX
 0    WRITE(IWRIT,430)(ICAR(I,IAUX),I=1,3),IEGBL,(X(J,I),I=IAIG,K)
      IF(LARGE-K)30,30,20
      IAIG=K+1
      K=K+7
      GO TO 10
 TEST DE BLOCAGE
      IF(X(NX1,LARGE)-TENU)32,31,32
      IF(KOMPT-ITER+5)33,33,34
 3    WRITE(IWRIT,25)
      AMDIF=.8+AMDIF*.2
      IIX=0
      KOD2=LARGE
      DO 35 I=1,NX
 5     X(I,LARGE)=X(I,1)*A(I)
 2    KOMPT=ITER
 TEST SUR L'ETAT DE LA CLE 14 (PERFORATION EVENTUELLE DES RESULTATS)
 4    CALL DATSW(14,I)
      GOTO(6,36),I
      WRITE(IWRIT,450)
      WRITE(ICARD,460)FMIN,ITMAX,IMP,NA,MB,(IV(1,I),I=1,6),LARGE,NXT,ITE
     1R
      J=NA+1
      WRITE(ICARD,470)(AA(I),I=1,J)
      J=MB+1
      WRITE(ICARD,470)(BB(I),I=1,J)
      DO 5 I=1,LARGE
      WRITE(ICARD,470)(X(J,I),J=1,NXT)
      PAUSE 14
```

page 3/3

```
5      RETURN
5      FORMAT(/'OBLOCAGE')
7      FORMAT(/'ONOUVEAU DEPART',10X,'ITERATION',I4)
3      FORMAT(/'ODEPART',I4,' ITERATIONS')
9      FORMAT(/'ODEPART DIRECT',10X,'ITERATION',I4)
30     FORMAT(/'OITERATION MAXI ATTEINTE')
40     FORMAT(/'OARRET DEMANDE AU PUPITRE')
30     FORMAT(/'OPOINTS QUASI IDENTIQUES')
92     FORMAT('OITERATION',I4,15X,'CODE',2I5)
00     FORMAT(/'OPRECISION ATTEINTE')
10     FORMAT('OOMEGA =',1X,7E15.7)
20     FORMAT(' ',A2,A1,I2,A2,1X,7E15.7)
30     FORMAT(' ',4A2,7E15.7)
60     FORMAT(/'OX PERFORE EN E16.7')
50     FORMAT(F10.7,2I4/10I2,I3)
70     FORMAT(5E16.7)
       END

ATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

ORE REQUIREMENTS FOR SCRIP
COMMON     298  VARIABLES      42  PROGRAM    1230

LATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 00F8 (HEX)

ID OF COMPILATION
```

page 1/4

```
/ FOR                ** SUBROUTINE CRIT **
ONE WORD INTEGERS
LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE CRIT(X)
      DIMENSION X(18),US(10),UT(10),UW(10)
      DIMENSION A(10),B(10),AA(10),BB(10),DERY(10),PRMT(5),AS(10),BS(10)
     1,AT(10),BT(10),AW(10),BW(10)
      COMMON T,RO,N,M,A,B,AA,BB,EN,ENM1,IAIG,ICARD,IWRIT,LARGE,NX,NX1,NX
     1T,NA,MB,NV,NV1,MV,MV1,NCR,NCR1,MDR,MDR1,NCD,NCD1,MDD,MDD1,IMP,ITMA
     2X,ITER,I,J,K,L,IX,IIX,KOUNT,KOD1,KOD2,INDIC,IAUX,LARG1,KOMPT,IB,AM
     3DIF,TRUP,PI,WMAXI,WMINI,FMIN,OMEGA,DERY,PRMT,AS,BS,AT,BT,AW,BW,PAS
     4,TPIM,SPIM
      DATA PEN/1000000./
      ITER=ITER+1
      OMEGA=X(1)
      RO=X(2)
      T=(PI+PI)/OMEGA
      IX=2
CRITERE
      CRT=OMEGA*OMEGA
      CALL POLMU(X,AA,A,NV,NA,N,IX,AS)
      CALL POLMU(X,BB,B,MV,MB,M,IX,BS)
      IIX=IX
      CALL POLMU(X,A,BS,NCR,N,I,IX,AT)
      CALL POLMU(X,B,DERY,MDR,M,J,IX,BT)
      CALL POLMU(X,BS,AS,NCD,I,K,IX,AW)
      CALL POLMU(X,DERY,BS,MDD,J,L,IX,BW)
SEUIL ET HYSTERESIS ASSOCIES A T ET RO
      CALL CYP(AS,BS,K,L,RE,AIM,REP,AIMP,OMEGA,RO)
*SEUIL
      X(NX1+3)=AIMP-AIM
*HYSTERESIS
      X(NX1+4)=-(AIM+AIMP)
CONTRAINTES MAJEURES
      IPEN=11111
* OMEGA POSITIF OU NUL
      IF(OMEGA)30,40,40
      CRT=CRT-OMEGA*PEN
      IPEN=1111
* RO POSITIF ET INFERIEUR OU EGAL A 1
      EN=-RO
      IF(EN)50,65,60
      EN=RO-1.
      IF(EN)70,65,60
      CRT=CRT+EN*PEN
      IPEN=IPEN-1000
* CONDITIONS DE CYCLE LIMITE RESPECTEES
** RE NEGATIF
      IF(RE)110,105,100
0     CRT=CRT+RE*PEN
5     IPEN=IPEN-100
```

page 2/4

```
** REP NEGATIF
10    IF(REP)130,125,120
10    CRT=CRT+REP*PEN
5     IPEN=IPEN-10
CONDITIONS INITIALES EN 'U'(STOCKE DANS BS)
0     K=N+1
      IAIG=(K/2)*2
1     AS(K)=0.
      K=K-1
      IF(K)132,132,131
2     L=0
3     J=L+1
      AS(J)=1.
      CALL CYP(A,AS,N,L,RE,AIM,REP,AIMP,OMEGA,RO)
      BS(J)=AIM
      L=L+2
      BS(L)=RE*OMEGA
      AS(J)=0.
      IF(IAIG-L)134,134,133
 RECHERCHE DE S MAXI
4     DATE=0.
      TRUP=RO*T*.5
      PAS=TRUP*.1
      SN=0.
      NS=10
      NS=NS-1
      PRMT(1)=DATE
      DATE=DATE+PAS
      SNM1=SN
      PRMT(2)=DATE
      IAIG=-1
      CALL RKGS(PRMT,BS,DERY,A,N,B,M,A,N,B,M,SN,PAS,IAIG)
      K=1
      GO TO 1000
1     IF(ABS(SN)-ABS(SNM1))25,26,26
      IF(NS)27,27,29
      PAS=T*(1.-RO)*.05
      IF(DATE-1.2*TRUP)28,281,281
ECHEC DANS LA RECHERCHE DE SMAXI
1     CRT=CRT+100
      GO TO 104
      X(NX1+1)=SNM1
      X(NX1+2)=PRMT(1)
CONTRAINTE
* ABS(SUPS) INFERIEUR OU EGAL A 0.005
      BORNE=ABS(SNM1)-.005
      IF(BORNE)90,85,80
      CRT=CRT+BORNE*PEN
      IPEN=IPEN-1
 TEST DE RESPECT DE L'ENSEMBLE DES CONTRAINTES MAJEURES
      IF(IPEN-11110)104,104,381
TEST DE POSSIBILITE D'EVALUATION PAR EXTRAPOLATION
1     IF(IB)38,383,382
EVALUATION PAR EXTRAPOLATION
2     IB=-1
3     TPIC=TPIM
      SPIC=SPIM
      IAUX=1001
      GO TO 150
EVALUATION PAR CALCUL
MESURE DU TEMPS DE REPONSE INDICIELLE (ECHELON=.005)
INITIALISATIONS
      DATE=0.
      PAS=0.01
      NS=N
      MS=M
      J=NS+1
      DO 1 I=1,J
      US(I)=0.
      UT(I)=0.
      UW(I)=0.
      AS(I)=A(I)
      BS(I)=B(I)
      IXN=0
      SN=0.
      SNM1=0.
      TN=0.
      RNM1=.05
      WN=0.
```

```
      IPIC=1
      WMAX=(X(NX1+3)+X(NX1+4))*.5
      WMIN=(X(NX1+3)-X(NX1+4))*.5
      BORNE=1.2*ABS(WMAX)
      RN=.05-SN
      DATE=DATE+PAS
 TEST DE DUREE D'INTEGRATION
      IF(DATE-1.)62,62,165
5     IAUX=1
      GOTO(104,105),IPIC
 TRAITEMENT DU SIGNAL D'ERREUR RN ET ELABORATION DE L'ENTREE WN DE
          L'ELEMENT NON LINEAIRE
      WNM1=WN
      IF(NCD)13,11,12
      WN=RN*X(IX)/X(IX-1)
      GO TO 14
      ENM1=RNM1
      EN=RN
      IAIG=2
      CALL RKGS(PRMT,UW,DERY,A,N,B,M,AW,NCD,BW,MDD,WN,PAS,IAIG)
      K=2
      GO TO 1000
      WN=RN
 REPONSE IXN DU NON LINEAIRE
      IXNM1=IXN
      WMAXI=WMAX
      WMINI=-WMAX
      IF(IXNM1)15,17,16
      WMINI=-WMIN
      GO TO 17
      WMAXI=WMIN
      IF(WN-WMINI)18,18,19
      IXN=-1
      GO TO 32
      IF(WN-WMAXI)21,20,20
      IXN=1
      GO TO 32
      IXN=0
 REPONSE SN DE LA FONCTION DE TRANSFERT LINEAIRE DE LA CHAINE DIRECTE
      ENM1=WNM1
      EN=WN
      SNM1=SN
      IAIG=1
      CALL RKGS(PRMT,US,DERY,A,N,B,M,AS,NS,BS,MS,SN,PAS,IAIG)
      K=3
      GO TO 1000
 TESTS DE PICS
2     GOTO(41,44),IPIC
 * PREMIER PIC
      IF(SNM1-.045)5,5,42
      IF(SNM1-SN)5,43,43
      TPIC=DATE-PAS
      SPIC=SNM1
      IPIC=2
      GO TO 5
 * DEUXIEME PIC
      IF(SNM1-SN)35,5,5
 TRAITEMENT DU SIGNAL DE CONTRE REACTION ET ELABORATION DE L'ERREUR RN
      IAIG=2
      RNM1=RN
      IF(NCR)8,6,7
      RN=.05-SN*X(IIX+2)/X(IIX+1)
      GO TO 10
      EN=SN
      ENM1=SNM1
      CALL RKGS(PRMT,UT,DERY,A,N,B,M,AT,NCR,BT,MDR,TN,PAS,IAIG)
      RN=.05-TN
      K=4
      GO TO 1000
 CONTRAINTES MINEURES
      SNM1=.05+ABS(.05-SNM1)-SPIC
      IAUX=1
 * STABILISATION APPARENTE DE LA REPONSE INDICIELLE
      IF(SNM1)160,150,150
0     CRT=CRT+SNM1*.5
      IAUX=11
 * PREMIER DEPASSEMENT INFERIEUR A 5/1000
0     IF(SPIC-.055)190,145,140
0     CRT=CRT+SPIC
```

page 4/4

```
145    IAUX=IAUX-1
       GO TO 190
180    IAUX=0
C  PRISE EN COMPTE DU 'TEMPS DE PIC'
190    CRT=CRT+TPIC*TPIC
C SAUVEGARDES
       IAIG=IPEN
       X(NX1)=CRT
       X(NX1+5)=T
       X(NX1+6)=SPIC
       X(NXT)=TPIC
       RETURN
C TRAITEMENT DU CODE D'ERREUR DE RKGS
1000   IF(IAIG-10)103,103,104
C SORTIE LORS D'ERREUR DANS RKGS  OU LORSQUE LES CONTRAINTES MAJEURES
C         SONT PAS SATISFAITES
104    TPIC=1.
       SPIC=-1.
       GO TO 180
103    GOTO(101,14,102,10),K
       END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR CRIT
 COMMON     298  VARIABLES    110  PROGRAM   1196

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 008F (HEX)

END OF COMPILATION
```

page 1/1

```
// FOR                   ** SUBROUTINE POLMU **
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
       SUBROUTINE POLMU(X,A,AX,NX,NA,NAX,IX,Y)
       DIMENSION X(17),A(10),AX(10),Y(10)
       NA1=NA+1
       IF(NX)1,3,3
C      X EST LE POLYNOME UNITE
1      NAX=NA
       DO 2 I=1,NA1
2      AX(I)=A(I)
       RETURN
C            AX  =  A*X
3      NX1=NX+1
       NAX=NA+NX
       NAX1=NAX+1
       DO 4  I=1,NAX1
4      AX(I)=0.
       DO 5  I=1,NA1
       DO 5  J=1,NX1
       IJ=I+J-1
       JIX=J+IX
5      AX(IJ)=X(JIX)*A(I)+AX(IJ)
       DO 7  I=1,NX1
       IX=IX+1
7      Y(I)=X(IX)
       RETURN
       END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR POLMU
 COMMON       0  VARIABLES     10  PROGRAM    220

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 000D (HEX)

END OF COMPILATION
```

```
// FOR                        ** SUBROUTINE FCT **                          page 1/1
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE FCT(DATE,W)
      DIMENSION W(10)
      DIMENSION A(10),B(10),AA(10),BB(10),DERY(10),PRMT(5),AS(10),BS(10)
     1,AT(10),BT(10),AW(10),BW(10)
      COMMON T,RO,N,M,A,B,AA,BB,EN,ENM1,IAIG,ICARD,IWRIT,LARGE,NX,NX1,NX
     1T,NA,MB,NV,NV1,MV,MV1,NCR,NCR1,MDR,MDR1,NCD,NCD1,MDD,MDD1,IMP,ITMA
     2X,ITER,I,J,K,L,IX,IIX,KOUNT,KOD1,KOD2,INDIC,IAUX,LARG1,KOMPT,IB,AM
     3DIF,TRUP,PI,WMAXI,WMINI,FMIN,OMEGA,DERY,PRMT,AS,BS,AT,BT,AW,BW,PAS
     4,TPIM,SPIM
      K=N-1
      DO 10 I=1,K
10    DERY(I)=W(I+1)
      K=N+1
      IF(IAIG-1)15,40,40
C     CAS DE L'INTEGRATION SUR UN DEMI CYCLE LIMITE
15    ENT=1.
      IF(TRUP-DATE)20,20,30
20    ENT=0.
30    W(K)=ENT
      DO 35 I=1,N
35    W(K)=W(K)-A(I)*W(I)
      W(K)=W(K)/A(K)
      DERY(N)=W(K)
      RETURN
C     CAS DE LA MESURE DU TEMPS DE REPONSE
C     * SORTIE D'UN ELEMENT LINEAIRE OU NON
40    ENT=ENM1+(EN-ENM1)*DATE/PAS
      GOTO(50,30),IAIG
C     * SORTIE DU NON LINEAIRE
50    IF(WMAXI-ENT)60,60,70
60    ENT=1.
      GO TO 30
70    IF(WMINI-ENT)20,90,90
90    ENT=-1.
      GO TO 30
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR FCT
 COMMON     298  VARIABLES       4  PROGRAM     196

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0009 (HEX)

END OF COMPILATION
```

```
// FOR                        ** SUBROUTINE RKGS **                         page 1/3
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE RKGS(PRMT,Y,DERY,AA,NDIM,BB,MM,AX,LX,BX,MX,Z,PS,IA)
      DIMENSION Y(10),DERY(10),A(4),B(4),C(4),PRMT(7)
      DIMENSION AX(10),BX(10),AA(10),BB(10)
      DIMENSION V1(10),V2(10),V3(10),V4(10),V5(10),V6(10),V7(10),V8(10)
      DATA A,B,C/.5,.2928932,1.707107,.1666667,2.,1.,1.,2.,.5,.2928932,1
     1.707107,.5/
      IF(IA)1000,50,50
50    NDIM=LX
      MM=MX
      J=LX+1
      DO 60 I=1,J
60    AA(I)=AX(I)
      J=MX+1
      DO 70 I=1,J
70    BB(I)=BX(I)
      PRMT(1)=0.
      PRMT(2)=PS
1000  PRMT(3)=PS*.5
      Z=1./NDIM
```

page 2/3

```
      DO 1 I=1,NDIM
    1 V8(I)=.06666667*Z
      X=PRMT(1)
      XEND=PRMT(2)
      H=PRMT(3)
      Z=PRMT(4)
      PRMT(5)=0.
      CALL FCT(X,Y)
      IF(H*(XEND-X))36,36,2
2     DO 3 I=1,NDIM
      V1(I)=Y(I)
      V2(I)=DERY(I)
      V3(I)=0.
    3 V6(I)=0.
      IREC=0
      H=H+H
      IHLF=-1
      ISTEP=0
      IEND=0
    4 IF((X+H-XEND)*H)7,6,5
    5 H=XEND-X
    6 IEND=1
    7 IF(PRMT(5))40,8,40
    8 ITEST=0
    9 ISTEP=ISTEP+1
      J=1
   10 AJ=A(J)
      BJ=B(J)
      CJ=C(J)
      DO 11 I=1,NDIM
      R1=H*DERY(I)
      R2=AJ*(R1-BJ*V6(I))
      Y(I)=Y(I)+R2
      R2=R2+R2+R2
   11 V6(I)=V6(I)+R2-CJ*R1
      IF(J-4)12,15,15
   12 J=J+1
      IF(J-3)13,14,13
   13 X=X+.5*H
   14 CALL FCT(X,Y)
      GOTO 10
   15 IF(ITEST)16,16,20
   16 DO 17 I=1,NDIM
   17 V4(I)=Y(I)
      ITEST=1
      ISTEP=ISTEP+ISTEP-2
   18 IHLF=IHLF+1
      X=X-H
      H=.5*H
      DO 19 I=1,NDIM
      Y(I)=V1(I)
      DERY(I)=V2(I)
   19 V6(I)=V3(I)
      GOTO 9
   20 IMOD=ISTEP/2
      IF(ISTEP-IMOD-IMOD)21,23,21
   21 CALL FCT(X,Y)
      DO 22 I=1,NDIM
      V5(I)=Y(I)
   22 V7(I)=DERY(I)
      GOTO 9
   23 DELT=0.
      DO 24 I=1,NDIM
   24 DELT=DELT+V8(I)*ABS(V4(I)-Y(I))
      IF(DELT-Z)28,28,25
   25 IF(IHLF-10)26,80,36
80    Z=10.*Z
   26 DO 27 I=1,NDIM
   27 V4(I)=V5(I)
      ISTEP=ISTEP+ISTEP-4
      X=X-H
      IEND=0
      GOTO 18
   28 CALL FCT(X,Y)
      DO 29 I=1,NDIM
      V1(I)=Y(I)
      V2(I)=DERY(I)
      V3(I)=V6(I)
      Y(I)=V5(I)
   29 DERY(I)=V7(I)
      IF(PRMT(5))40,30,40
   30 DO 31 I=1,NDIM
      Y(I)=V1(I)
   31 DERY(I)=V2(I)
      IREC=IHLF
```

page 3/3

```
      IF(IEND)32,32,40
   32 IHLF=IHLF-1
      ISTEP=ISTEP/2
      H=H+H
      IF(IHLF)4,33,33
   33 IMOD=ISTEP/2
      IF(ISTEP-IMOD-IMOD)4,34,4
   34 IF(DELT-.02*Z)35,35,4
   35 IHLF=IHLF-1
      ISTEP=ISTEP/2
      H=H+H
      GOTO 4
36    WRITE(3,998)IHLF,DELT
998    FORMAT(' IHLF = ',I4,3X,'DELT=',E14.7)
   40 J=MX+1
      Z=0.
      DO 41 I=1,J
41    Z=Z+Y(I)*BB(I)
      IA=IHLF
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR RKGS
 COMMON       0  VARIABLES     218  PROGRAM     976

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 00F9 (HEX)

END OF COMPILATION
```

page 1/2

```
// FOR                    ** SUBROUTINE CYP **
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE CYP(A,B,N,M,RE,AIM,REP,AIMP,OMEGA,RO)
      DATA PI,UNSPI/3.141593,.3183099/
      DIMENSION A(10),B(10)
C     INITIALISATIONS
      K=100
      N1=N+1
      M1=M+1
      IF(N-M-2)1,2,3
1     K=400
2     K=K*7
3     RE=0.
      AIM =RE
      REP=RE
      AIMP=RE
      I=-1
      PIRO=PI*RO
C DEBUT D'ITERATION
30    I=I+2
      OMI=I*OMEGA
      UA=A(N1)
C     DENOMINATEUR DE LA FONCTION DE TRANSFERT POUR P=J*OMEGA*I
      VA=0.
      J=N
      GO TO 20
30    U=A(J)-VA*OMI
      VA=UA*OMI
      UA=U
      J=J-1
```

page 2/2

```
20      IF(J)40,40,30
C       NUMERATEUR DE LA FONCTION DE TRANSFERT POUR P=J*OMEGA*I
40      UB=B(M1)
        VB=0.
        J=M
        GO TO 50
60      U=B(J)-VB*OMI
        VB=UB*OMI
        UB=U
        J=J-1
50      IF(J)70,70,60
C       VALEUR COMPLEXE DE LA TRANSMITTANCE POUR P=J*OMEGA*I
70      V=UA*UA+VA*VA
        U=(UA*UB+VA*VB)/V
        V=(UA*VB-VA*UB)/V
C       SOMMATION
        VB=I*PIRO
        VA=1.-COS(VB)
        VB=SIN(VB)
        RE=RE+VA*U
        REP=REP+VB*V
        AIM=AIM+VB*U/I
        AIMP=AIMP+VA*V/I
C       TEST DE FIN DE CALCUL
        IF(K-I)90,90,80
C       VALEURS FINALES
90      UA=(RE+RE)*UNSPI
        UB=(AIM+AIM)*UNSPI
        VA=(AIMP+AIMP)*UNSPI
        VB=(REP+REP)*UNSPI
        RE=UA-VB
        REP=UA+VB
        AIM=VA+UB
        AIMP=VA-UB
C       CALCUL DES SAUTS EVENTUELS
        U=B(M1)/A(N1)
        IF(N-M1)100,120,110
100     AIM=AIM-U
        AIMP=AIMP-U
        RE=-1.E38
        REP=RE
110     RETURN
120     U=U/OMEGA
        RE=RE-U
        REP=REP-U
        GO TO 110
        END

FEATURES SUPPORTED

 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR CYP
 COMMON        0  VARIABLES     32  PROGRAM     504

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 002B (HEX)

END OF COMPILATION
```

BIBLIOGRAPHIE

A - Théorie -

[1] J . C . GILLE , P . DECAULNE et M . PELEGRIN .
" Méthodes d'étude des systèmes asservis non linéaires "
(Techniques de l'automatisme - Dunod - Paris 1967 - Chapitre 4 -) .

[2] J . Z . CYPKIN .
" Théorie des asservissements par plus ou moins "
(Dunod - Paris 1962 - Traduction de l'ouvrage publié en langue russe aux éditions scientifiques d'état de Moscou

[3] J . G . PAQUET , J . F . LE MAITRE et J . C . GILLE .
" La méthode de Hamel-Cypkin et son application aux fonctions de transfert particulières "
(Automatismes - Tome XI - n° 1 Janvier 1966 - Page 3 - Dunod -) .

[4] C . MIRA .
" Cours de systèmes asservis non linéaires "
(Maîtrise d'E.E.A. - C3 Automatique - Dunod 1969 - Chapitre 5 -) .

[5] SEVELY . Y .
" Cours de D.E.A. d'automatique "
(Non publié - Laboratoire d'automatique et ses Applicatio
Spatiales - Toulouse 1969 -) .

B - Réacteur nucléaire -

[6] J . MENEZES et P. JOVER .
" Etude théorique d'un système de pilotage automatique par " tout-ou-rien " pour un réacteur nucléaire "
(Rapport C.E.A. - R - 2547 - Commissariat à l'énergie atomique - Octobre 1964 -) .

[7] J . UBERSCHLAG , P . JOVER et J . WEILL .
" Génie atomique "
(Chapitre XIX - " Fonction de transfert et pilotage automatique des réacteurs " - Bibliothèque des sciences et techniques nucléaires - 1963 -) .

C - Optimisation -

[8] H . CAMBE et M . LE BOT .
" Applications du calcul hybride aux problèmes de recherche de paramètres "
(Rapport C.E.A. - N - 1418 - Commissariat à l'énergie atomique - Décembre 1970 -) .

[9] R . BOUDAREL , J . DELMAS et P . GUICHET .
" Commande optimale des processus " - Tome 2 " Programmation non linéaire et ses applications "
(Techniques de l'automatisme - Dunod - Paris 1968) .

[10] J . VIGNES .
" Etude et mise en oeuvre d'algorithmes de recherche d'un extrêmum d'une fonction de plusieurs variables "
(Thèse de Sciences Appliquées - Paris 1969 -) .

D - Analyse numérique -

[11] I . BABUŠKA , M . PRAGER et E . VITASEK .
" Numérical processes in differential equations "
(Prague Interscience Publishers - Prague 1966 -) .

[12] J . TODD .
" Survey of Numérical Analysis "
(Mc Graw Hill - New York 1962 -) .

[13] STIEFELD .
" Intoduction à l'analyse numérique "
(Dunod -) .

[14] A . RALSTON , H . S . WILF .
" Mathematical methods for digital computers "
(Wiley - New York / London - 1960 - Pages 110 - 120 -) .

[15] " Scientific Subroutine Package " Système / 360 .
360 A - CM - 03X - Version III - H20 - 0205 - 3 - Page 333
(IBM - Data Processing division - New York-) .

[16] " Cours de calcul numérique "
Service Bureau - RF5 - 5053 - 0 - IBM France - 1968 -

E - Publication -

[17] J . LANGLA .
" Une méthode d'étude directe du régime permanent dans une régulation par plus-ou-moins " .
(C . R . Académie des Sciences - Paris - n° 1 p 133 t 274 - séance du 3 Janvier 1972 - Série A) .